INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bessenrodt
Dr. Merziger

19. Juli 2003

Lineare Algebra 2
Klausur

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 6 & -1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie

(a) die *Jordan*–Normalform von A,
(b) eine zugehörige *Jordan*–Basis und
(c) die additive und die multiplikative *Jordan–Chevalley*–Zerlegung von A.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Quadrik $x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2\sqrt{3}\, x_1 x_3 - 8 = 0$.

(a) Bestimmen Sie die Normalform der affinen Ähnlichkeitsklasse der Quadrik,
(b) bestimmen Sie die Hauptachsen (Eigenvektoren der zugehörigen Matrix) der Quadrik
(c) und skizzieren Sie die Quadrik.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ und für $v, w \in \mathbb{R}^3$ sei $< v, w > := v^\top A w$.

(a) Zeigen Sie: $< \ , \ >$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.
(b) Normieren Sie $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich $< \ , \ >$ und
ergänzen Sie diesen Vektor zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich $< \ , \ >$.
(c) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement von $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ bezüglich $< \ , \ >$.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) $A^\top A$ ist symmetrisch.

(b) $A^\top A$ ist positiv definit.

(c) Es gibt ein $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $A^\top A = B^2$.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

Zeigen Sie: Es gibt eine eindeutig bestimmte affine Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\alpha\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}, \quad \alpha\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\16\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24\\12\end{pmatrix}.$$

Geben Sie diese in der Form $\alpha(x) = Ax + b$ mit $A \in M_2(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 6 (*10 Punkte*)

Seien $A, B \in M_n(K)$ mit $AB = BA$ und alle Eigenwerte von A, B einfach.
Zeigen Sie: A und B haben dieselben Eigenvektoren.

Aufgabe 7 (*10 Punkte*)

Gegeben sei das Polynom $p(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{Z}_3[X]$.

(a) Unter welchen Bedingungen für a, b, c ist das Polynom p irreduzibel?

(b) Benutzen Sie diese Bedingungen, um die Anzahl der irreduziblen normierten Polynome vom Grad 3 in $\mathbb{Z}_3[X]$ zu bestimmen.

Klausurrückgabe: Mi 13.08.03 im Raum C 401 (Merziger) von 10–12 Uhr

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Merziger

19. Juli 2003

Lineare Algebra 2
Klausur
Lösungshinweise

Aufgabe 1

(a) $\chi_A = \ldots = (X+1)^3$, Rang $(A+E) = \ldots = 2$, also $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Jordan-Basis $S = \ldots = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ mit $J = S^{-1}AS$.

(c) Da $S(-E)S^{-1} = -E$, sieht man sofort
$A = -E + (A+E)$ ist die additive J–C–Zerlegung von A.
Mit $U := -A$ und $D := -E$ gilt $UD = DU = A$.
$A = (-E)(-A)$ ist die multiplikative J–C–Zerlegung von A.

Aufgabe 2

Matrizenschreibweise der Quadrik: $x^\top Mx - 8 = 0$ mit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
$\chi_M = \ldots = (X-2)^2(X+2)$.
Orthonormalbasis aus Eigenvektoren ist $A = \ldots = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.
Die Substitution $y = Ax$ liefert $2y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2 - 8 = 0$ mit affiner Normalform $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1$, einschaliges Hyperboloid.

Aufgabe 3

(a) $A = A^\top$, $\chi_A = (X-1)(X^2 - 5X + 5)$, also alle EW positiv.
Also ist $<\,,\,>$ ein Skalarprodukt (positiv definite, symmetrische Bilinearform).

(b) Für $b_1 = (1,0,0)^\top$ gilt $b_1^\top A b_1 = 3$, also $b = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, b_1$ ist normiert.
$b^\top Ax = 0$ liefert z.B. $b_2 = (1,-3,0)^\top$ und $b_3 = (0,0,1)^\top$ mit $b_2^\top A b_2 = 15$, $b_3^\top A b_3 = 1$.
Orthonormalbasis: $\frac{1}{3}\sqrt{3}\, b_1$, $\frac{1}{15}\sqrt{15}\, b_2$, b_3.

(c) $(0,1,2)Ax = 0$ und $(1,-2,-3)Ax = 0$ ergibt als Lösung des LGS die Gerade $x = (0,1,-1)^\top \mathbb{R}$ als orthogonales Komplement der gegebenen Ebene.

Aufgabe 4

(a) $(A^\top A)^\top = A^\top A$, also $AA^\top$ symmetrisch.

(b) $x^\top A^\top Ax = (Ax)^\top(Ax) > 0$ für $x \neq 0$, da für $x \neq 0$ auch $Ax \neq 0$ ist. Also $A^\top A$ positiv definit.

(c) Ist $S^{-1}A^\top AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, dann ist
$A^\top A = \left(S \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})S^{-1}\right)\left(S \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})S^{-1}\right) =: B^2$ und $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Aufgabe 5

$\alpha(x) = Ax + b$,

$A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^2$ sind gemäss den Vorgaben zu bestimmen:

$$\begin{array}{l} A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}\\ A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix}20\\16\end{pmatrix}\\ A\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix}24\\12\end{pmatrix}\end{array} \implies \begin{array}{l} A\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}\\ A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix}\end{array} \implies \begin{array}{l} a_{11} = -9\\ a_{12} = 1\\ a_{21} = -3\\ a_{22} = -1\end{array} \text{ eindeutige Lösung des LGS.}$$

Also ist A und damit die zugehörige lineare Abbildung eindeutig bestimmt.
Man erhält weiter $b = \begin{pmatrix}1\\11\end{pmatrix}$, also $\alpha(x) = \begin{pmatrix}-9 & 1\\-3 & -1\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}1\\11\end{pmatrix}$.

Aufgabe 6

$A, B \in M_n(K)$, $AB = BA$, alle Eigenwerte von A, B einfach, dann gilt:
Ist x Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, also $x \neq 0$, $Ax = \lambda x$, dann $ABx = BAx = \lambda Bx$,
also $Bx \in \operatorname{Eig}(A, \lambda) = <x>$, da λ einfacher Eigenwert, also $\dim \operatorname{Eig}(A, \lambda) = 1$.
Also $Bx = \mu x$, d.h. x ist Eigenvektor von B zum Eigenwert μ.
Also ist jeder Eigenvektor von A Eigenvektor von B und umgekehrt.

Aufgabe 7

(a) Sei $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, -1\}$ und $p = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{Z}_3[X]$. Es gilt:
p irreduzibel in $\mathbb{Z}_3[X] \iff p$ keine Nullstelle in $\mathbb{Z}_3$

$$\iff \begin{array}{c} 0 \text{ ist keine Nullstelle}\\ 1 \text{ ist keine Nullstelle}\\ -1 \text{ ist keine Nullstelle}\end{array} \iff \begin{array}{r} c \neq 0\\ 1 + a + b + c \neq 0\\ 1 + a - b + c \neq 0\end{array}$$

(b) Man sieht: Genau für folgende (a, b, c) sind obige Bedingungen erfüllt:

a	b	c
1	1	1
0	0	1
1	−1	1
−1	0	1
0	1	−1
1	0	−1
0	−1	−1
−1	0	−1

Es gibt also genau 8 irreduzible Polynome in $\mathbb{Z}_3[X]$.