Solomons Algebra, nichtkommutative Charaktere und die freie Lie-Algebra

Manfred Schocker

Die Defektmenge einer Permutation π in der symmetrischen Gruppe S_n ist definiert als

$$\mathsf{Des}(\pi) = \{\, i \leq n-1 \,|\, i\pi > (i+1)\pi \,\}.$$

Im Jahre 1976 entdeckte Solomon, daß der lineare Aufspann $\mathcal{D}_n$ der aufsummierten Defektklassen

$$\Delta^D = \sum_{\mathsf{Des}(\pi)=D} \pi$$

ein Teilring des ganzzahligen Gruppenrings von S_n ist, daß also $\pi, \sigma \in S_n$ in jedem der Produkte $\Delta^D \Delta^E$ mit gleicher Vielfachheit auftreten, falls $\mathsf{Des}(\pi) = \mathsf{Des}(\sigma)$ gilt.

So simpel die Beschreibung dieses Resultats ist, so knifflig ist ein direkter Beweis — und so weitreichend sind seine Konsequenzen, dank der verblüffenden Verbindungen zu zahlreichen anderen Gebieten der kombinatorischen Algebra. Da sind etwa die Theorie der freien Lie-Algebra zu nennen, die der 0-Heckealgebra, der nichtkommutativen und quasi-symmetrischen Funktionen, die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe — aber zum Beispiel auch wahrscheinlichkeitstheoretische Fragestellungen zum Mischen von Karten und zufallsabhängige Bewegungen in allgemeineren geometrischen Szenarien. Genauer sollte man von einer *Vermittlerrolle* der Solomonalgebra zwischen den verschiedenen Gebieten sprechen. Dies mit möglichst einfachen Mitteln zu illustrieren, wird mein Hauptanliegen sein. Spezielle Vorkenntnisse sind nicht erforderlich.

In der Tat können viele konkrete Probleme darauf reduziert werden, Permutationen mit gewissen (kombinatorischen) Eigenschaften zu studieren, was an einem Beispiel illustriert werden soll: die von Thrall im Jahre 1942 aufgeworfene Frage nach der Struktur der freien Lie-Algebra über V als $\mathsf{GL}(V)$-Modul konnte erst nach Jahrzehnten durch Arbeiten von Klyachko (1974) und Kraskiewićz-Weyman (1987) befriedigend beantwortet werden — wenn auch mit einem unbefriedigendem Beweis. Ein elementarer Alternativzugang zu diesem tiefliegenden Resultat bestünde aus dem Nachweis der folgenden *äquivalenten* kombinatorischen Aussage:

In jeder Defektklasse $\{\, \pi \in S_n \,|\, \mathsf{Des}(\pi) = D \,\}$ von S_n ($D \subseteq \{1, \ldots, n-1\}$) ist die Anzahl der Permutationen π vom Zykeltyp n gleich der Anzahl der Permutationen σ mit $\sum_{j \in \mathsf{Des}(\sigma^{-1})} j \equiv 1$ modulo n.

Die Konstruktion einer geeigneten Bijektion steht noch aus.