Algebraische Verbandstheorie

Marcel Erné
Institut für Algebra, Zahlentheorie
und Diskrete Mathematik
Leibniz Universität Hannover
erne@math.uni-hannover.de

Wintersemester 2006/2007

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Verbände und Ordnungen

1.1 Halbverbände und Verbände

Das Verbandskonzept geht auf Dedekind und Schröder zurück (Ende des 19. Jahrhunderts).

Definition:
Ein *Verband* ist eine Menge L zusammen mit zwei (binären) Verknüpfungen $\sqcup$ und $\sqcap$, so dass für alle $x, y, z \in L$ die Gesetze der

$$\begin{array}{rcc} \text{Assoziativität:} & x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z & x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z \\ \text{Kommutativität:} & x \sqcup y = y \sqcup x & x \sqcap y = y \sqcap x \\ \text{Absorption:} & x \sqcup (x \sqcap y) = x & x \sqcap (x \sqcup y) = x \end{array}$$

gelten.

Bei Dedekind heißen solche Strukturen *Dualgruppen*. Der Name *Verband* wurde von Fritz Klein (ca. 1930) gewählt. Garrett Birkhoff, der Begründer der modernen Verbandstheorie, prägte den englischen Begriff *lattice*.

Indem man die beiden Verbandsoperationen getrennt betrachtet, gelangt man zu folgender

Definition:
Ein *Halbverband* ist eine kommutative Halbgruppe (d.h. eine Menge H mit einer assoziativen und kommutativen binären Verknüpfung $\sqcap$), in der jedes Element idempotent ist, d.h.

$$x \sqcap x = x.$$

Satz 1.1
$(L, \sqcup, \sqcap)$ ist genau dann ein Verband, wenn $(L, \sqcup)$ und $(L, \sqcap)$ Halbverbände sind, für die gilt

$$x \sqcup y = y \quad \Leftrightarrow \quad x = x \sqcap y.$$

Beweis:
Das Idempotenzgesetz folgt aus der Absorption: Ersetze in der Absorptionsformel y durch $x \sqcup z$, dann gilt

$$x \overset{Abs}{=} x \sqcup (x \sqcap y) = x \sqcup (x \sqcap (x \sqcup z)) \overset{Abs}{=} x \sqcup x.$$

Aus $x \sqcup y = y$ folgt außerdem $x = x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcap y$. Dual für $\sqcap$.

Sind umgekehrt $(L, \sqcup)$ und $(L, \sqcap)$ Halbverbände mit

$$x \sqcup y = y \Leftrightarrow x = x \sqcap y,$$

so ergibt sich wegen

$$x \sqcup (x \sqcup y) \overset{Ass}{=} (x \sqcup x) \sqcup y \overset{Idem}{=} x \sqcup y$$

die Gleichung $x = x \sqcap (x \sqcup y)$. Dual bekommt man $x = x \sqcup (x \sqcap y)$.

$\square$

Definition:
Eine *Ordnung* (*Halbordnung*) ist eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation $\leq$ auf einer Menge P, d.h. es gilt

$$\begin{array}{ccc} & x \leq x & \\ x \leq y; \quad y \leq z & \Rightarrow & x \leq z \\ x \leq y; \quad y \leq x & \Rightarrow & x = y \end{array}$$

für alle $x, y, z \in P$. Das Paar $(P, \leq)$ (oft nur mit P bezeichnet) heißt dann (*halb*) *geordnete Menge*. $P^d = (P, \geq)$ mit $x \geq y \;\Leftrightarrow\; y \leq x$ ist die *dual geordnete Menge*.

Definition:
Sind je zwei Elemente x, y vergleichbar, d.h. $x \leq y$ oder $y \leq x$, so heißt die Ordnung $\leq$ *total* oder *linear* und $(P, \leq)$ *linear geordnet*.

Definition:

In einer *Antikette* sind alle Elemente paarweise unvergleichbar (d.h. $=$ ist die Ordnung). Analog sind in einer *Kette* alle Elemente paarweise vergleichbar.

Definition:

Ein Element $z \in P$ heißt *obere Schranke* von $Y \subset P$, falls $y \leq z$ für alle $y \in Y$ gilt. In diesem Fall ist Y *nach oben beschränkt*.
Dual: *untere Schranke*, *nach unten beschränkt*.

Definition:

Eine obere (untere) Schranke $z \in Y$ von Y heißt *Maximum* (*Minimum*) oder *größtes* (*kleines*) *Element von* Y. Dagegen erfüllt ein *maximales* (*minimales*) *Element* m nur die Bedingung

$$m \leq y \in Y \quad \Rightarrow \quad m = y.$$

Definition:

Ein Element $s \in P$ heißt *Supremum* einer Teilmenge $Y \subseteq P$, in Zeichen $s = \bigvee Y$, falls s die kleinste obere Schranke von Y ist, d.h. $\forall\, y \in Y\ (y \leq z) \Leftrightarrow s \leq z$.

Ist s kleinste obere Schranke von zwei Elementen x und y, so schreibt man $s = x \vee y$ und nennt s das Supremum von x und y.

Dual definiert man das *Infimum* $i = \bigwedge Y$ als größte untere Schranke von Y (falls sie existiert), und das Infimum zweier Elemente als $i = x \wedge y$.

Definitionsgemäß gilt also

$$\begin{aligned} x \leq z \text{ und } y \leq z \quad &\Leftrightarrow \quad x \vee y \leq z, \\ w \leq x \text{ und } w \leq y \quad &\Leftrightarrow \quad w \leq x \wedge y. \end{aligned}$$

Beispiele: Alle Ordnungen auf ≤ 3 Elementen Dabei sind 1.1, 2.2 und 3.2

Ketten (linear geordnete Mengen) und die einzigen Verbände mit höchstens drei Elementen. 2.1 und 3.1 sind Antiketten, 3.4 ist ein $\wedge$-Halbverband und 3.5 ein $\vee$-Halbverband (aber nicht umgekehrt).

Satz 1.2

Es besteht eine Bijektion $(L, \leq) \mapsto (L, \vee, \wedge)$ zwischen verbandsgeordneten Mengen (d.h. solche, in denen je zwei Elemente ein Supremum und ein Infimum besitzen) und Verbänden.

Die Umkehrabbildung $(L, \sqcup, \sqcap) \mapsto (L, \sqsubseteq)$ *ordnet jedem Verband eine geordnete Menge zu, mit*

$$x \sqsubseteq y \quad :\Leftrightarrow \quad x \sqcup y = y \quad \Leftrightarrow \quad x = x \sqcap y. \tag{1.1}$$

Analog liefern die Zuordnungen $(L, \leq) \mapsto (L, \vee)$ *und* $(L, \leq) \mapsto (L, \wedge)$ *jeweils Bijektionen zwischen geordneten Mengen, indenen je zwei ELemente ein Supremum bzw. Infimum besitzen und* ($\vee$*- bzw.* $\wedge$*-)Halbverbänden.*

Beweis: '$\Leftarrow$'

Trick: $x = y \;\Leftrightarrow\; \forall a\,(a \leq x \;\Leftrightarrow a \leq y)$

- Assoziativität
  Behauptung: ${}^1(x \wedge y) \wedge z =^2 \inf\{x, y, z\} =^3 x \wedge (y \wedge z)$
  Die Gleichheitszeichen gelten, da für alle a: $a \leq (1) \Leftrightarrow a \leq (2)$ und analog: $a \leq (3) \Leftrightarrow a \leq (2)$.

- Kommutativität
  Ebenso aus dem Trick: $a \leq (x \wedge y) \Leftrightarrow a \leq (y \wedge x)$, da in der Ordnung je zwei Elemente (unabhängig von der Reihenfolge) dasselbe Infimum, bzw. Supremum besitzen.

- Absorption

  $$x \vee (x \wedge y) \leq a \;\Leftrightarrow\; x \leq a \text{ und } x \wedge y \leq a \;\Leftrightarrow\; x \leq a,$$

  da $x \wedge y \leq x$. Nun liefert der (umgedrehte) Trick angewendet auf den linken und den rechten Teil der Äquivalenz den Beweis.

Duale Gleichungen folgen analog. Somit ist $(L, \vee, \wedge)$ ein Verband, und die Ordnung .

Beweis: '$\Rightarrow$'

Sei jetzt $(L, \sqcup, \sqcap)$ ein Verband und $\sqsubseteq$ definiert durch (1.1). Für die Ordnungseigenschaften genügt es, daß $(L, \sqcap)$ ein Halbverband ist.

- Reflexivität
  Folgt direkt aus der Idempotenz.

- Transitivität

  $$\begin{aligned} x \sqsubseteq y \sqsubseteq z \;\overset{1.1}{\Rightarrow}\;& x \sqcap y = x,\; y \sqcap z = y \quad \Rightarrow \quad x \sqcap (y \sqcap z) = x \\ &\overset{Ass}{\Rightarrow} (x \sqcap y) \sqcap z = x \quad \Rightarrow \quad x \sqcap z = x \qquad \Rightarrow x \sqsubseteq z \end{aligned}$$

- Antisymmetrie

$$x \sqsubseteq y \sqsubseteq x \quad \Rightarrow \quad x \sqcap y = x,\ y \sqcap x = y \quad \overset{Kom}{\Rightarrow} \quad x = x \sqcap y = y \sqcap x = y$$

- Verknüpfungen $\sqcup$, $\sqcap$ sind sup und inf

$$\begin{aligned} a \sqsubseteq x \sqcap y \quad &\Leftrightarrow \quad a \sqcap (x \sqcap y) = a \\ &\overset{Ass}{\Leftrightarrow} \quad (a \sqcap x) \sqcap y = a \end{aligned} \tag{1.2}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} a \sqcap x \quad &\overset{Abs}{=} \quad (a \sqcap x) \sqcup \Big((a \sqcap x) \sqcap y\Big) \\ &\overset{1.2}{=} \quad (a \sqcap x) \sqcup a \overset{Kom}{=} a \sqcup (a \sqcap x) \overset{Abs}{=} a \end{aligned}$$

also einerseits $a \sqsubseteq x$ und analog $a \sqcap y = a$, d.h. $a \sqsubseteq y$.

Andererseits folgt aus $a \sqcap x = a$ und $a \sqcap y = a$ mit (1.2) direkt $a \sqsubseteq x \sqcap y$. Analog für $\sqcup$.

$\square$

Wegen (1.2) unterscheiden wir häufig nicht zwischen Verbänden und verbandsgeordneten Mengen.

Satz 1.3 *Folgende Aussagen über eine geordnete Menge $(L, \leq)$ sind äquivalent:*

a) Jede Teilmenge Y hat ein Supremum $\bigvee Y$.

b) Jede Teilmenge Z hat ein Infimum $\bigwedge Z$.

c) L hat ein kleinstes Element $\bot/0$, und jede nichtleere Teilmenge hat ein Supremum.

d) L hat ein größtes Element $\top/1$, und jede nichtleere Teilmenge hat ein Infimum.

e) L hat $\top$ und $\bot$ und jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge hat ein Supremum.

f) L hat $\top$ und $\bot$ und jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge hat ein Infimum.

Beweis:

$a \Rightarrow b$: Sei $Y := Z_\downarrow$ die Menge der unteren Schranken von $Z \subseteq L$.
Nach $a)$ hat Y ein Supremum s, welches nach Definition über allen unteren Schranken von Z liegt. Da aber s auch untere Schranke von Z ist, ist $s = \bigvee Z$.

$b \Rightarrow a$ dual

$a \Rightarrow c$: $\bot = \bigvee \emptyset$

$c \Rightarrow e$: $\top = \bigvee L$

$e \Rightarrow a$: L und jede Teilmenge davon ist durch $\top$ nach oben beschränkt, und $\bigvee \emptyset = \bot$.

$b \Rightarrow d \Rightarrow f \Rightarrow b$ dual

$\square$

Definition:

Eine geordnete Menge mit diesen Eigenschaften heißt *vollständig(er Verband)*. Hat zumindest jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum, so spricht man von einer *bedingt vollständigen* geordneten Menge.

Korollar 1.4 *Für einen Verband L (mit der Ordnung $\leq$) sind äquivalent:*

a) L ist bedingt vollständig.

b) Der duale Verband L^d ist bedingt vollständig.

c) Jede nichtleere, beschränkte Teilmenge hat ein Supremum und ein Infimum.

Beweis:

$a \Rightarrow c$ und $b \Rightarrow c$ sind trivial.

$c \Rightarrow a$: Sei Y nichtleer und nach oben beschränkt. Wähle $y \in Y$, dann ist $W := \{x \vee y : \ x \in Y\}$ beschränkt und nichtleer ($y \in W$). Nach Voraussetzung hat W ein Supremum s. Um zu zeigen, daß $s = \bigvee Y$ gilt, ist nur noch $x \leq s$ für $x \in Y$ zu zeigen. Dies gilt, da $x \vee y \in W$, also $x \vee y \leq s$ und insbesondere $x \leq s$.

$c \Rightarrow b$: dual

$\square$

Konvention:

Für zwei Mengen A, B bezeichne A^B die Menge aller Abbildungen von B nach A. Im folgenden wird I für eine beliebige Indexmenge verwendet.

Die Potenzmenge von I sei mit $\uparrow P(I)$ oder 2^I bezeichnet, worin sich die Größe der Potenzmenge wiederspiegelt. Die Isomorphie der Potenzmenge zur Menge der Abbildungen von I nach $\{0,1\}$ ergibt sich, indem man jeder Teilmenge $j \subset I$ ihre characteristische Funktion χJ zuordnet:

$$\chi J(i) = \begin{cases} 1 & , \text{falls } i \in J \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} .$$

Beispiele:

1. Eine Antikette ist bedingt vollständig, da nur die einelementigen Teilmengen beschränkt sind. Je zwei Elemente besitzen weder Supremum noch Infimum.

2. Das „Family Poset“ erfüllt c) aber weder a) noch b), ist also bedingt vollständig, aber kein Verband, da z.B. die beiden unteren Elemente keine kleinste obere Schranke besitzen. Die (nichtleeren) beschränkten Teilmengen dagegen sind Ketten und haben sogar Minimum und Maximum.

3. $(\mathbb{R}, \leq)$ und $\mathbb{R}^M$ mit dem komponentenweisen $\leq$ sind bedingt vollständige Verbände.

4. Ist L bedingt vollständig, so ist $\bar{L} = L \cup \{-\infty, \infty\} = L \cup \{\top, \bot\}$ mit $\bot \leq \alpha \leq \top$ für alle $\alpha \in L$ vollständig.

5. Jedes kompakte Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ist ein vollständiger Verband, analog $[f,g] \sqsubseteq \mathbb{R}^M$.

6. Jeder nichtleere, endliche Verband ist vollständig, ebenso jeder endliche $\vee$-Halbverband mit kleinstem Element.

7. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$, etc und Potenzen derselben sind bedingt vollständige Verbände, aber nicht vollständig (ohne $\top$ und ggf. $\bot$). $\mathbb{Q}$ ist nicht bedingt vollständig: $\{\alpha \in \mathbb{Q} : \; x^2 \leq 2\}$ hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

8. Ordnung 3.4 (aus der Liste der Ordnungen mit ≤ 3 Elementen, s.o.) ist ein $\vee$-Halbverband, 3.5 ein $\wedge$-Halbverband, beide aber kein Verband, wenn auch bedingt vollständig.

1.2 Darstellung von Verbänden

Definition:

Gilt $x < y$, aber es gibt kein z mit $x < z < y$, so schreiben wir $x \prec y$ und nennen x einen *unteren Nachbarn* von y, bzw. y einen *oberen Nachbarn* von x, und sagen: x und y sind *benachbart.*

- Bei der graphischen Darstellung von Ordnungen und Verbänden wird stets nur die Nachbarschaftsrelatiuon eingetragen.
- Für endliche Ordnungen beginnt man mit den minimalen Elementen, und setzt dann die oberen Nachbarn sukezessive auf.

Beispiel:
Definition:
Ein (*unterer*) *Abschnitt* einer geordneten Menge P ist eine Teilmenge A mit $x \leq y \in P \;\Rightarrow\; x \in A$. Dual sind *obere Abschnitte* definiert.

Korollar 1.5 *Für $Y \subset P$ ist*

$$\downarrow Y := \{x \in P \mid \exists\, y \in Y\ (x \leq y)\}$$

der von Y erzeugte untere Abschnitt (d.h. der kleinste, der Y umfasst und

$$\uparrow Y := \{x \in P \mid \exists\, y \in Y\ (y \leq x)\}$$

ist der von Y erzeugte obere Abschnitt.

Definition:
Für endliches $Y \subset P$ (geschrieben $Y \Subset P$) heißt $\downarrow Y$ bzw. $\uparrow Y$ *endlich erzeugt.*

Definition:
Dagegen bezeichnet

$$Y_{\downarrow} := \{x \in P \mid \forall\, y \in Y\ (x \leq y)\}$$

die Menge der unteren Schranken (genannt *unterer Schnitt*), und

$$Y^{\uparrow} := \{x \in P \mid \forall\, y \in Y\ (y \leq x)\}$$

die Menge der oberen Schranken (*oberer Schnitt*) von Y.

Korollar 1.6 *Für die* Hauptideale

$$\downarrow y = \downarrow \{y\} = \{x \in P \mid x \leq y\}$$

gilt also

$$\downarrow Y = \bigcup\{\downarrow y \mid y \in Y\}$$
$$Y_{\downarrow} = \bigcap\{\downarrow y \mid y \in Y\}.$$

Dual für obere Abschnitte und Schnitte.

Definition:
Es bezeichne $\mathfrak{A}P$ die Menge aller (unteren) Abschnitte von P.

Kapitel 2

Distributivgesetze

Definition:
Ein Verband heißt *distributiv*, falls für alle $x, y, z \in L$ gilt:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

In Ringen gilt das Distributionsgesetz $x(y+z) = xy + xz$, aber nicht die „duale“ Formel $x + yz = (x+y)(x+z)$. Hingegen:

Satz 2.1 *Für einen Verband L sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

a) *L ist distributiv.*

a') *L^d ist distributiv.*

b) $x \wedge \bigvee Y = \bigvee (x \wedge Y)$ *für alle* $\emptyset \neq Y \Subset L$.

c) $\bigvee Y_1 \wedge \cdots \wedge \bigvee Y_n = \bigvee \{y_1 \wedge \cdots \wedge y_n \,:\, y_i \in Y_i (i \leq n)\}$ *für alle* $\emptyset \neq Y_i \Subset L$; $(i \leq n)$.

d) $\bigwedge \{\bigvee Y \,:\, Y \in \mathcal{Y}\} = \bigvee \bigcap \mathcal{Y}$ *für alle nichtleeren* $\mathcal{Y} \subseteq \{\downarrow F \mid F \Subset L\}$.

e) *Es gilt das Mediangesetz*

$$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) =: m. \quad (2.1)$$

f) *Anti-Blocking-Property (verwendet in KI)*

$$x \wedge y \leq z \text{ und } x \leq y \vee z \quad \Rightarrow \quad x \leq z.$$

g) Relative Komplemente sind eindeutig:

$$x \vee y = x \vee z \text{ und } x \wedge y = x \wedge z \quad \Rightarrow \quad y = z.$$

h) L hat keinen Unterverband der Formen „Pentagon“, „Diamant“.

i) Alle fünfelementigen Unterverbände sind distributiv.

Beweis:

$a \Leftrightarrow a'$:

$$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge (x \vee z) &\overset{a}{=} \Big((x \vee y) \wedge x\Big) \vee \Big((x \vee y) \wedge z\Big)\\ &\overset{Abs/a}{=} x \vee \Big((x \wedge z) \vee (y \wedge z)\Big)\\ &\overset{Ass}{=} \Big(x \vee (x \wedge z)\Big) \vee (y \wedge z) \overset{Abs}{=} x \vee (y \wedge z)\end{aligned}$$

$a \Rightarrow b$: Induktion

$b \Rightarrow c$: Induktion

$c \Rightarrow d$: Ist $\mathcal{Y} = \{\downarrow Y_i : i \leq n\}, Y_i \Subset L$, so gilt

$$\begin{aligned}\bigwedge \overset{\rightarrow}{\bigvee} Y &= \bigwedge\{\bigvee \downarrow Y_i : i \leq n\} = \bigwedge\{\bigvee Y_i : i \leq n\}\\ &= \bigvee\{y_1 \wedge \cdots \wedge y_n \;:\; y_i \in Y_i \; (i \leq n)\} = \bigvee \bigcap \mathcal{Y}_i\end{aligned}$$

, da $\bigcap \mathcal{Y} = \downarrow \{y_1 \wedge \cdots \wedge y_n : y_i \in Y_i \; (i \leq n)\}$

$a \Rightarrow e$: Mehrfache Anwendung der Distributivitätsbedingung.

$a \Rightarrow f$: $x = x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq z$.

$f \Rightarrow g$: $x \wedge y = y \wedge z \leq z,\; x \leq x \vee z = y \vee z \Rightarrow x \leq z$, und analog $z \leq x$, also $z = x$.

$g \Rightarrow h$: Klar, da in N_5 und M_3 Komplemente nicht eindeutig sind.

$h \Rightarrow i$: N_5 und M_3 sind die einzigen nichtdistributiven Verbände mit 5 Elementen.

Die umgekehrten Beweise sind teilweise sehr aufwendig.

□

Definition:

Eine *Boolsche Algebra* ist ein distributiver Verband, in dem es zu jedem x ein (eindeutiges) Komplement $x^\perp$ gibt, mit $x \wedge x^\perp = \perp,\; x \vee x^\perp = \top$, z.B. Potenzmengen.

Definition:

Ein *Lokal* oder *Rahmen* ist ein vollständiger Verband L, so daß

$$x \wedge \bigvee Y = \bigvee (x \wedge Y) \qquad (= \bigvee \{x \wedge y : \; y \in Y\})$$

gilt, für alle $x \in L$ und $Y \subseteq L$. Entsprechend gilt für ein *duales Lokal*

$$x \vee \bigwedge Y = \bigwedge (x \vee Y).$$

Korollar 2.2 *Vollständige Boolsche Algebren sind Lokale, da für alle a gilt*

$$\begin{aligned} \bigvee (x \wedge Y) \leq a \quad & \Leftrightarrow \quad \forall y \in Y (x \wedge y \leq a) \\ & \overset{BA}{\Leftrightarrow} \quad \forall y \in Y (y \leq a \vee x^{\perp}) \\ & \Leftrightarrow \quad \bigvee Y \leq a \vee x^{\perp} \quad \overset{BA}{\Leftrightarrow} \quad x \wedge \bigvee Y \leq a. \end{aligned}$$

Konvention:

Für einen Operator (oder eine Abbildung) Φ bezeichne $\Phi^{\rightarrow}\mathcal{Y}$ die Bildmenge $\{\Phi Y \; : \; Y \in \mathcal{Y}\}$. Insbesondere ist also $\bigvee^{\rightarrow} \mathcal{Y} = \{\bigvee Y : Y \in \mathcal{Y}\}$ für die Supremum-Abbildung $\bigvee : \uparrow P(L) \mapsto L$ eines vollständigen Verbandes.

Korollar 2.3 *Ist L ein Lokal und $Y, Z \subseteq L$, $\mathcal{Y} = \{\downarrow Y_i \; : i = 1, \dots n\} = \{x : \exists y \in Y_i; \, x \leq y\}$ ein endliches System unterer Abschnitte, so gilt*

$$\bigvee Y_1 \wedge \dots \wedge \bigvee Y_n = \bigvee \{y_1 \wedge \dots \wedge y_n \; : \; y_i \in Y_i (i \leq n)\}$$

für alle $Y_i \subseteq L$; $(i \leq n)$, und

$$\bigvee \bigcap \mathcal{Y} = \bigwedge \bigvee^{\rightarrow} \mathcal{Y}.$$

Umgekehrt folgt aus diesen Gleichungen, daß L ein Lokal ist.

Bemerkung:

Im Unterschied zu distributiven Verbänden (Satz 2.1 c und d) gelten die Gleichungen hier auch für die leere Menge und endlich viele unendliche Mengen Y_i.

Beweis:

Die erste Gleichung folgt direkt aus der Definition des Lokals:

$$\bigvee Y \wedge \bigvee Z = \bigvee (Y \wedge \bigvee Z) = \bigvee (Y \wedge Z),$$

die Zweite kommt dadurch zustande, daß bei unteren Abschnitten der mengentheoretische Durchschnitt gleich dem verbandstheoretischen Infimum ist.

$\square$

Definition:

Ein vollständiger Verband L heißt *volldistributiv*, falls für jedes System $\mathcal{Y}$ unterer Abschnitte gilt:

$$\bigvee \bigcap \mathcal{Y} = \bigwedge \bigvee^{\rightarrow} \mathcal{Y}.$$

Satz 2.4 *Es gilt für jeden vollständigen Verband L:*

$$L \textit{ volldistributiv } \Leftrightarrow L^d \textit{ volldistributiv } \Leftrightarrow$$
$$\forall\, x, y \in L \quad (x \not\leq y \Rightarrow \exists\, p, q \in L : p \not\leq y, x \not\leq q, \uparrow p \cup \downarrow q = L) \tag{2.2}$$

Beweis:

Sei L volldistributiv, $A_x = \bigcap \{\downarrow A = A : x \leq \bigvee A\}$, dann gilt $x = \bigvee A_x$, da

$$X = \bigwedge \{\bigvee \downarrow A : x \leq \bigvee A\} == \bigvee \bigcap \{\downarrow A = A : x \leq \bigvee A\} = \bigvee A_x.$$

Wegen $x \not\leq y$ gibt es ein $p \in A_x$ mit $p \leq y$. Setze $q = \bigvee(L \backslash \uparrow p)$. Dann gilt $\uparrow p \cup \downarrow q = L$ (da $L \backslash \uparrow p \subseteq \downarrow q$), und $x \not\leq q$ (da sonst $a_x \subseteq L \backslash \uparrow p$ im Widerspruch zu $p \in A_x$).

Gelte umgekehrt (2.2) speziell für $x = \bigwedge \bigvee^{\rightarrow} \mathcal{Y},\ y = \bigwedge \bigcap \mathcal{Y}$. Dann ist $L \backslash \uparrow p \notin \mathcal{Y}$ (da sonst

$\square$

Bemerkung:

Die letzte Bedingung lässt sich auch als $\forall z \in L : (p \leq z \text{ oder } z \leq q)$ schreiben, wodurch die zweifach verschachtelte Definition der Volldistributivität durch einen Ausdruck erster Stufe (Quantoren nur bei Elementen) beschrieben werden kann.

Beispiele:

1) Jede vollständige Kette ist nach Satz 2.4 volldistributiv. Desgleichen jedes Produkt vollständiger Ketten, z.B. die Menge $[0,1]^I$ (I beliebig). Ebenso vollständige Unterverbände. Insbesondere für zwei Funktionen f, g das „Intervall“ $[f, g] = \{h : f \leq h \leq g\} = \prod_{i \in I}[f(i), g(i)]$, sofern dieses nicht leer ist (d.h. $f \leq g$).

2) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist nicht volldistributiv, da nicht vollständig.

3) Jeder Abschnittsverband $\mathfrak{A}P$ ist volldistributiv, da hier Vereinigung = Supremum und Durchschnitt = Infimum sind.

4) $\uparrow P(I)$ ist volldistributiv für eine beliebige Menge I, da die Potenzmenge isomorph ist zu $2^I = [0,1]^I$.

5) Jede Topologie ist ein Lokal , da hier $\bigvee \equiv \bigcup$, $\bigwedge \equiv \bigcap$ und

$$U \cap \bigcup \mathcal{Y} = \bigcup \{U \cap V \ : V \in \mathcal{Y}\},$$

denn

$$\begin{aligned} x \in U \cap \bigcup \mathcal{Y} \Leftrightarrow &\quad x \in U \text{ und } \exists V \in \mathcal{Y} : \ (x \in V) \\ \Leftrightarrow &\quad \exists V \in \mathcal{Y} : \ (x \in U \text{ und } x \in V) \\ \Leftrightarrow &\qquad \exists V \in \mathcal{Y} : \ (x \in U \cap V) \qquad \Leftrightarrow x \in \bigcup \{U \cap V : \ V \in \mathcal{Y}\}. \end{aligned}$$

6) Eine Topologie ist selten ein duales Lokal. So ist z.B. eine T_1-Topologie $\mathcal{T}$, die ein duales Lokal ist, bereits diskret. Sei $\mathcal{L} = \mathcal{T}^c$ der Verband der abgeschlossenen Mengen und $\mathcal{L}$ sei ein Lokal. Verbandstheoretisch ist der Abschluss das Supremum der einpunktigen Teilmengen:

$$\bar{A} = \overline{\bigcup \Big\{ \{a\} \, : \, a \in A \Big\}} = \bigvee \Big\{ \{a\} \, : \, a \in A \Big\}.$$

Und für $x \in X$ gilt:

$$\{x\} \cap \bar{A} = \{x\} \cap \bigvee \Big\{ \{a\} \, : \, a \in A \Big\} \overset{Lokal}{=} \bigvee \Big\{ \{x\} \cap \{a\} \, : \, a \in A \Big\}$$

und dies ist die leere Menge für alle $x \notin A$, also ist $A = \bar{A}$.

7) Die *Scott-Topologie* oder *obere Topologie* auf $[0,1]^n$ besteht aus allen euklidisch offenen oberen Abschnitten und ist die größte Topologie, in der alle Hauptideale $\downarrow y = [0,y]$ abgeschlossen sind. Sie ist volldistributiv, aber nicht T_1.

8) Lokale, die nicht isomorph zu einer Topologie sind (gäbe es keine solchen Lokale, so würde die Theorie der Lokale gleich der der Topologien sein, und man könnte sie sich sparen), sind z.B. alle vollständigen Boolschen Algebren ohne Atome. Die einzigen Boolschen T_0-Topologien sind die Potenzmengen, denn in einer solchen Topologie ist jede einpunktige Menge als Durchschnitt aller offenen = abgeschlossenen Mengen abgeschlossen, also auch offen.

   Eine vollständige, atomlose Boolsche Algebra ist $\mathcal{L}/\mathcal{N}$, mit der Menge der Lebesgue-meßbaren Mengen $\mathcal{L}$ und dem Ideal der Nullmengen $\mathcal{N}$. Einelementige Mengen (die als Atome in Frage kämen) und sogar endliche Mengen werden hier mit der leeren Menge $\emptyset = \perp$ identifiziert, da sie dieser fast überall gleich sind.

9) Weitere vollständige Boolsche Algebren (und damit Lokale) sind alle Verbände regulär offener Mengen topologischer Räume. Eine Menge A ist regulär offen, wenn der offene Kern des Abschlusses gleich der Ausgangsmenge ist.

Definition:

Ein Verband L heißt *modular*, falls das Distribtivitätsgesetz für je drei Elemente gilt, von denen zwei vergleichbar sind.

Bemerkung:

Dies ist weniger als Distributivität. Die Zusatzbedingung lässt sich auch so ausdrücken:

$$(x \wedge y) \vee z = x \wedge (y \vee z), \qquad \text{falls } x \geq z.$$

Dabei ist die Forderung $x \geq y$ aus Symmetriegründen alternativ, während die Gleichung für $x \leq y$, bzw. $x \leq z$ trivialerweise erfüllt ist (wende Absorption an). Ebenso gilt die Distributivität automatisch, wenn nur y und z vergleichbar sind.

Dedekind hat eine weitere Darstellung in reiner Gleichungsform vorgestellt:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge \Big(y \vee (x \wedge z)\Big).$$

Dies folgt sofort aus der Übersetzung $z = x \wedge z \Leftrightarrow z \leq x$.

Satz 2.5 *(Dedekind 1900)*
Für einen Verband L sind äquivalent

a) L ist modular.

b) Das Distriubtivitätsgesetz gilt für je drei Elemente, von denen zwei vergleichbar sind.

c) Aus $z \leq x$, $x \vee y = y \vee z$ und $x \wedge y = y \wedge z$ folgt $x = z$.

d) L enthält kein Pentagon (N_5) als Unterverband.

e) Für $x, y, z \in L$ gilt

$$x \wedge \Big(y \vee (x \wedge z)\Big) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Beweis:

$a \Rightarrow b$: Ist $z \leq x$, so gilt $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ nach a). Analog, falls $y \leq z$. Gilt hingegen $x \leq y$ oder $x \leq z$, so sind beide Seiten gleich x. Im Falle $y \leq z$ oder $z \leq y$ kommt auf beiden Seiten $x \wedge y$ heraus.

$b \Rightarrow a$: $z \leq x \quad \Rightarrow \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge y) \vee z$

$a \Rightarrow c$: $x = x \wedge (x \vee y) = x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z = (x \wedge z) \vee z = z$

$c \Rightarrow d$: Das Pentagon widerspricht c).

$d \Rightarrow a$: Es ist stets $\tilde{z} := (x \wedge y) \vee z \leq x \wedge (y \vee z) =: \tilde{x}$. Wäre $\tilde{z} \leq \tilde{x}$, so ergäbe sich ein Pentagon:

$a \Leftrightarrow e$: Folgt aus der Übersetzung $x = x \wedge x \;\Leftrightarrow\; z \leq x$.

□

Kapitel 3

Hüllen, Kerne, Adjunktionen

3.1 Hüllen und Kerne

Definition:

Ein *Hüllenoperator* auf einer Menge X ist eine Abbildung $\Gamma : \uparrow P(X) \to \uparrow P(X)$ mit

$$Y \subseteq \Gamma(Z) \iff \Gamma(Y) \subseteq \Gamma(Z).$$

Schreibweise: $\overline{Y}$ statt $\Gamma(Y)$.

Dual ist ein *Kernoperator* auf X eine Abbildung $K : \uparrow P(X) \to Pp(X)$ mit

$$K(Y) \subseteq Z \iff K(Y) \subseteq K(Z).$$

Schreibweise: Y° statt $K(Y)$.

Eine Abbildung $\Phi : \uparrow P(X) \to \uparrow P(X)$ bewahrt (endliche, gerichtete Vereinigungen), falls für (endlich, gerichtete) $\mathcal{Y} \subseteq \uparrow P(X)$ gilt:

$$\Phi\left(\bigcup \mathcal{Y}\right) = \bigcup \Phi^{\rightarrow}(X)$$

Eine quasigeordnete Menge ist gerichtet, falls jede endliche Teilmenge eine obere Schranke hat.

Ein Hüllenoperator heißt *topologisch*, falls er endliche, *algebraisch*, falls er gerichtete und *A-topologische*, falls er beliebige Vereinigungen bewahrt. *Eine A-Topopologie ist algebraisch und topologisch.*

Beispiele:

1) Der euklidische Abschluss im R^n ist topologisch, aber nicht algebraisch.

$$
\begin{aligned}
& \bigcup\left\{[\frac{1}{n},1]|n\in\mathbb{N}\right\} &=& \quad \overline{]0,1]} = \overline{[0,1]}, \\
\text{aber}\quad & \bigcup\left\{\overline{[\frac{1}{n},1]}|n\in\mathbb{N}\right\} &=& \quad]0,1]
\end{aligned}
$$

2) Die lineare Hülle ist algebraisch, aber nicht topologisch (in beliebigen Vektorräumen).

$$
\begin{aligned}
\overline{\{(x,y)|y=0\}} \cup \overline{\{(x,y)|x=0\}} &= \overline{\{(x,y)|x=0 \text{ und } y=0\}} \\
&\neq \overline{\{(x,y)|x=0 \text{ oder } y=0\}}
\end{aligned}
$$

Also ist der Hüllenoperator nicht topologisch, aber algebraisch:
Sei $\mathcal{Y}$ ein gerichtetes System von Teilmengen des Vektroraums V. Dann gilt

$$< \bigcup \mathcal{Y} > = \bigcup \{ < Y > | Y \in \mathcal{Y}\}$$

denn für Linaearkombinationen braucht man nur endlich viele Elemente.

3) Die Operation $\downarrow$ ist A-topologisch.

Definition:

Eine *Hüllenoperation* auf einer geordneten Menge P ist eine Abbildung $\gamma : P \to P$ mit

$$y \leq \gamma(z) \iff \gamma(y) \leq \gamma(z).$$

Eine *Kernoperation* auf einer geordneten Menge P ist eine Abbildung $\gamma : P \to P$ mit

$$y \geq \gamma(z) \iff \gamma(y) \geq \gamma(z).$$

Satz 3.1 *Eine Abbildung $\gamma : P \to P$ ist genau dann eine Hüllenopertion, wenn gilt:*

1.)	$x \leq \gamma(x)$	*(extensiv, expansiv)*
2.)	$x \leq y \Rightarrow \gamma(x) \leq \gamma(y)$	*(ordnungserhaltend, isoton)*
3.)	$\gamma(\gamma(x)) = \gamma(x)$	*(idempotent)*

Eine Abbildung $\gamma : P \to P$ ist genau dann eine Kernopertion, wenn gilt:

1.)	$x \geq \gamma(x)$	*(kontraktiv, regressiv)*
2.)	$x \geq y \Rightarrow \gamma(x) \geq \gamma(y)$	*(ordnungserhaltend, isoton)*
3.)	$\gamma(\gamma(x) = \gamma(x)$	*(idempotent)*

Mit $^-$ *ist* $\gamma(x) = \overline{x}, x \leq \overline{x}, x \leq y \Rightarrow \overline{x} \leq \overline{y}, \overline{\overline{x}} = \overline{x}$.

Beweis: '$\Rightarrow$'

Sei γ eine Hüllenoperation.

1.) $\gamma(x) \leq \gamma(x) \Rightarrow x \leq \gamma(x)$

2.) $x \leq y \overset{trans}{\Rightarrow} x \leq \gamma(y) \overset{def}{\Rightarrow} \gamma(x) \leq \gamma(y)$

3.) $\gamma(x) \leq \gamma(\gamma(x))(extensiv)$, $\gamma(x) \leq \gamma(x) \overset{Def.}{\Rightarrow} \gamma(\gamma(x)) \leq \gamma(x)$.

Beweis: '$\Leftarrow$'

Sei umgekehrt γ extensiv, isoton und idempotent.
Wegen der Extensivität folgt aus $\gamma(y) \leq \gamma(z)$ bereits $y \leq \gamma(z)$; gilt andererseits $y \leq \gamma(z)$, so gilt wegen der Isotonie $\gamma(y) \leq \gamma(\gamma(z)) = \gamma(z)$ aufgrund der Idempotenz.

$\square$

Definition:

Ein *Hüllenbereich* einer geordneten Menge P ist eine Teilmenge H derart, dass zu jedem $x \in P$ ein kleinstes $\overline{x} \in H$ mit $x \leq \overline{x}$ existiert. Ein *Kernbereich* einer geordneten Menge P ist eine Teilmenge H derart, dass zu jedem $x \in P$ ein kleinstes $\mathring{x} \in H$ mit $x \geq \mathring{x}$ existiert.

Beispiele:

1) Runden auf n Stellen nach oben: Hüllenoperation
   nach unten: Kernoperation

2) Es sei $(\mathbb{N}_0, |)$ die durch die Teilerrelation geordnete Menge. Dann ist die Abbildung
$$n \mapsto \prod_{\substack{p \in P \\ p|n}} p$$
eine Kernoperation.

3) Die identische Abbildung $id : P \to P$ ist die einzige Abbildung, die sowohl Hüllen- als auch Kernoperation ist.

Satz 3.2 *Die Zuordnung* $\gamma \mapsto \gamma^{\rightarrow}(P)$ *ist ein dualer Isomorphismus zwischen der geordeneten Menge aller Hüllenoperationen und der Menge (durch* $\subseteq$ *geordneten) aller Hüllenbereiche. Dasselbe gilt dual für Kernoperationen.*

Beweis:
(i) $\gamma^{\rightarrow}(P) = H$ ist ein Hüllenbereich, denn für $x \in P$ ist $\overline{x} = \gamma(x)$ das

kleinste Element von H über x.
(ii) Für jeden Hüllenbereich $H \subseteq P$ definiert

$$\gamma_H : \begin{cases} P & \rightarrow & P \\ x & \mapsto & \overline{x} := \min\{h \in H | x \leq h\} \end{cases}$$

eine Hüllenoperation, da $y \leq \overline{z} \in H \iff \overline{y} \leq \overline{z}$ ist.
(iii) Für $H = \gamma^{\rightarrow}(P)$ ist $\gamma = \gamma_H$.

$$\begin{array}{rcl} \gamma(x) \in H & \Rightarrow & \gamma_H(x) = \overline{x} \leq \gamma(x) \\ \text{und } h \in H \;\&\; x \leq h & \Rightarrow & \exists y \in P\big(h = \gamma(y)\big) \\ & \Rightarrow & \gamma(x) \leq \gamma(y) = h \end{array}$$

Also ist $\gamma_H(x) = \gamma(x)$.
(iv) Für einen Hüllenbereich H gilt: $H = \gamma_H^{\rightarrow}(P)$.

$$\begin{array}{rcl} x \in H & \Rightarrow & \gamma_H(x) = x \in \gamma_H^{\rightarrow}(P) \\ x \in \gamma_h^{\rightarrow}(P) & \Rightarrow & \exists y \in P\big(x = \gamma_H(y) \in H\big). \end{array}$$

(v) $H \subseteq H^{'} \iff \gamma_{H'} \leq \gamma_H$:
„$\Longrightarrow$“: Das Minimum kann höchstns kleiner werden, da $Y \subseteq Y^{'} \Rightarrow \min Y \leq \min Y^{'}$ ist.
„$\Longleftarrow$“:

$$\begin{array}{rcl} y \in H & \Rightarrow & y = \gamma_H(y) \geq \gamma_{H'}(y) \\ & \overset{\gamma_H extensiv}{\Rightarrow} & y = \gamma_{H'}(y) \in H \end{array}$$

$\square$

Satz 3.3 *Eine Hüllenopertaion $\gamma : L \rightarrow L$ bewahrt genau dann beliebige (endliche, gerichtete) Suprema, wenn der Hüllenbereich $H = \gamma^{\rightarrow}(P)$ abgeschlossen gegen (endliche, gerichtete) beliebige Suprema ist.*

Beweis: '$\Leftarrow$'

Es bewahre γ Suprema. Dann gilt für beliebige (endliche, gerichtete) $Y \subseteq H$:

$$\begin{array}{rcl} \gamma\left(\bigvee Y\right) & = & \bigvee \gamma^{\rightarrow}(Y) \\ & = & \bigvee Y \qquad (Fixpunkt) \end{array}$$

$\Rightarrow \bigvee Y \in H$. Beachte $\gamma^{\rightarrow}(L) = \{x|\gamma(x) = x\} = Fix\,\gamma$.

Beweis: '$\Rightarrow$'

Umgekehrt sei H gegen Suprema abgeschlossen. Für beliebige (endliche, gerichtete) $Y \subseteq L$ ist auch $\gamma^{\rightarrow}(Y)$ beliebig (endlich, gerichtet) und eine Teilmenge von H. Wegen der Isotonie von γ gilt: $\gamma^{\rightarrow}(Y) \leq \gamma(\bigvee Y)$, da $y \leq (\bigvee Y)$ für alle $y \in Y$ ist. Andererseits folgt aus $\gamma^{\rightarrow}(Y) \leq s$ auch $\gamma(\bigvee Y) \leq s$, da $\bigvee \gamma^{\rightarrow}(Y) \in H$ und $\bigvee \gamma^{\rightarrow}(Y) \leq s$ sowie $\bigvee Y \overset{extensiv}{\leq} \bigvee \gamma^{\rightarrow}(Y) = h = \gamma(h) \in H$. Also ist $\gamma(\bigvee Y) \leq h \leq s$. Das heißt $\gamma(\bigvee Y)$ ist kleinste obere Schranke von $\gamma^{\rightarrow}(Y)$.

$\square$

Beispiele:

1) Der Abschnittsoperator $\downarrow$ bewahrt beliebige Vereinigungen, da das System der Abschnitte abgeschlossen gegen Vereinigungen ist.

2) Ein Hüllenoperator ist genau dann topologisch (d.h. er bewahrt endliche Vereinigungen), wenn seine Bildmenge eine duale Topologie (d.h. abgeschlossen gegen beliebige Durchschnitt und endliche Vereingungen ist) ist.

3) Ein Hüllenoperator bewahrt genau dann gerichtete Vereinigungen, wenn seine Bildmenge ein algebraisches Hüllensystem (d.h. abgeschossen gegen gerichtete Vereinigungen ist) ist.

Korollar 3.4 *Die Zuordnung $\gamma \mapsto \gamma^{\rightarrow}(L)$ ist eine Bijektion zwischen*

1) Hüllenoperator, die beliebige Vereingiungen bewahren, und Hüllenbereichen, die gegen beliebige Vereinigungen abgeschlossen sind.

2) Hüllenoperator, die endliche Vereingiungen bewahren, und Hüllenbereichen, die gegen endliche Vereinigungen abgeschlossen sind.

3) Hüllenoperator, die gerichtete Vereingiungen bewahren, und Hüllenbereichen, die gegen gerichtete Vereinigungen abgeschlossen sind.

Satz 3.5 *In einem vollständigen Verband sind die Hüllenbereiche genau die gegen Durchschnitt abgeschlossenen Teilmengen. Insbesondere sind Hüllensysteme gegen Durchschnittsbildung abgeschlossene System.*

Beweis: '$\Rightarrow$'

Es sei $H \subseteq L$ und H $\vee$–abgeschlossen. Dann ist für jedes $x \in L$

$$\bigvee\{y \in H | x \leq y\} = \gamma_H(x)$$

das kleinste über x liegende Element von H.
Beweis: '$\Leftarrow$'

Umgekehrt ist jeder Hüllenverband gegen Suprema $\vee$ abgeschlossen. Sei $Y \subseteq H$, $X = \bigvee Y$. Dann existiert ein kleinstes $h \in H$ mit $x \leq h$. Da $h \leq y$ für alle $y \in Y \subseteq H$ ist, ist $h \leq x$. Somit ist $x = \vee Y = h \in H$.

$\square$

Beispiel:

Alle Hüllenbereiche der Verbände

bilden ein Hüllensystem, also einen vollständigen Verband, der nicht modular ist, da ein Pentagon enthalten ist, aber semimodular,
das heißt, es gilt $a \prec a \vee b \Rightarrow a \wedge b \prec b$.

3.2 Adjunktionen

Definition:

Eine *Adjunktion* zwischen geordneten Mengen P und Q ist ein Paar von Abbildungen

$$P \underset{\lambda}{\overset{\rho}{\dashv}} Q \qquad \text{, mit } \lambda(p) \leq q \iff p \leq \rho(q).$$

Galois–Verbindungen zwischen P und Q sind Adjunktionen zwischen P^d und Q, das heißt:

$$(\varphi, \psi) \text{ Galois Verbingung } \iff \big(q \leq \psi(p) \Leftrightarrow p \leq \varphi(q)\big)$$

Es sind dann $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$ Hüllenoperationen.

Satz 3.6 *Es seien P und Q geordnete Mengen. Dann gilt $P \underset{\lambda}{\overset{\rho}{\dashv}} Q$ genau dann, wenn λ, ρ isoton sind, $\lambda \circ \rho$ eine Kernoperation und $\rho \circ \lambda$ eine Hüllenoperation ist. Eigentlich genügt bereits, dass $\lambda \circ \rho$ kontraktiv und $\rho \circ \lambda$ extensiv ist. Die Abbildungen entlang der diagonalen Pfeile sind surjektiv restringiert. Ferner gilt $\lambda \circ \rho \circ \lambda = \lambda$ und $\rho \circ \lambda \circ \rho = \rho$, die sogenannte Pseudoinversen.*

Beweis: '⇒':

$$\begin{aligned} p \in P &\Rightarrow \lambda(p) \leq \lambda(p) \iff p \leq \rho \circ \lambda(p) \\ q \in Q &\Rightarrow \rho(q) \leq \rho(q) \iff \lambda \circ \rho(q) = q \end{aligned}$$

Wegen der Isotonie gilt

$$\begin{aligned} p \leq p^{'} &\Rightarrow p \leq \rho \circ \lambda(p^{'}) \Rightarrow \lambda(p) \leq \lambda(p^{'}) \\ q \leq q^{'} &\Rightarrow q \leq \lambda \circ \rho(q^{'}) \Rightarrow \rho(q) \leq \rho(q^{'}) \end{aligned}$$

Wegen der Isotonie von λ gilt

$$\begin{aligned} id \leq \rho \circ \lambda &\Rightarrow \lambda \leq \lambda\rho\lambda \\ &\Rightarrow \rho \leq \rho\lambda\rho. \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \lambda \circ \rho \leq &\Rightarrow \lambda \circ \rho \circ \lambda \\ &\Rightarrow \rho \circ \lambda \circ \rho \leq \rho \end{aligned}$$

Somit ist $\lambda \circ \rho \circ \lambda = \lambda$, $\rho \circ \lambda \circ \rho = \rho$ und $\lambda \circ \rho \circ \lambda \circ \rho = \lambda \circ \rho$, $\rho \circ \lambda \circ \rho \circ \lambda = \rho\lambda$. Also ist $\lambda \circ \rho$ kontraktiv, isoton und idempotent und $\rho \circ \lambda$ extensiv, isoton un idempotent.

Beweis: '⇐':

Sei λ , ρ isoton, $\lambda \circ \rho$ kontraktiv und $\rho \circ \lambda$ extensiv. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda(p) \leq q &\overset{\rho \text{ anwenden}}{\Longrightarrow} \rho \circ \lambda(p) \leq \rho(q) \overset{ext.}{\Longrightarrow} p \leq \rho(q) \\ &\overset{\lambda \text{ anwenden}}{\Longrightarrow} \lambda(p) \leq \lambda \circ \rho(q) \overset{kontr.}{\Longrightarrow} \lambda(p) \leq q. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.7

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) \textit{ ist Galoisverbingung} &\iff \varphi, \psi \textit{ antiton} \\ &\quad\& \quad \varphi \circ \psi,\ \psi \circ \varphi \textit{ Hüllenoperationen} \end{aligned}$$

Satz 3.8 *Für eine Abbildung $\lambda : P \to Q$ zwischen geordneten Mengen sind äquivalent:*

1) λ ist residuiert, das heißt, Urbilder von Hauptidealen ($\downarrow q = \{x | x \leq q\}$) sind Hauptideale.

2) Es gibt (genau) eine Abbildung $\rho : Q \to P$ mit $P \underset{\lambda}{\overset{\rho}{\leftrightarrows}} Q$. Diese ist gegeben durch

$$\rho : \begin{cases} Q & \to & P \\ q & \mapsto & \bigvee\{p \in P | \lambda(p) \leq q\} \end{cases}$$

Diese Bedingungen implizieren:

3) λ bewahrt Suprema.

Wenn P vollständig ist, so gelten auch die umgekehrten Implikationen (von (c) nach (a), (b)).

Beweis:

$a \Rightarrow b$: Die Menge $\{p \in P | \lambda(p) \leq q\} = \lambda^{\leftarrow}(\downarrow q)$ ist ein Hauptideal $\downarrow \rho(q)$ und dann gilt:

$$\lambda(p) \leq q \iff p \leq \rho(q).$$

Eindeutigkeit (notwendigerweise): $\rho(q) = \max \lambda^{\leftarrow}(\downarrow q)$.

$b \Rightarrow a$: Wegen ($\underset{\rightarrow}{\leftarrow}$) ist $\lambda^{\leftarrow}(\downarrow q) = \downarrow \rho(q)$ ein Hauptideal.

$a \Rightarrow c$: $p = \bigvee Y$ in P. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda(p) \leq q &\Leftrightarrow p \leq \rho(q) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in Y \big(y \leq \rho(q)\big) \\ &\Rightarrow \lambda(p) = \bigvee \lambda^{to}(Y) \\ &\leftrightarrow \forall y \in Y \big(\lambda(p) \leq q\big) \end{aligned}$$

Also ist $\lambda(p) = \bigvee \lambda^{\rightarrow}(Y)$.

$c \Rightarrow a$: Es ist P vollständig und λ bewahrt Suprema. Es ist zu ueigen,

$$\forall p_q \big(\lambda^{\leftarrow}(q) = \downarrow p_q\big).$$

Setze:

$$p_q = \bigvee \{p \in P | \lambda(p) \leq q\}$$

Dann folgt

$$\lambda(p_q) \quad = \quad \bigvee \{p \in P | \lambda(p) \leq q\} \leq q$$

Das heißt $p_q = \max\{p \in P | \lambda(p) \leq q\}$, also $\downarrow p_q = \lambda^{\leftarrow}(\downarrow q)$.

$\square$

Korollar 3.9 *Für $\rho : Q \to P$ sind äquivalent:*

1) *ρ ist residual, das heißt Urbilder Huaptideale $(\uparrow p)$ sind duale Hauptideale.*

2) *Es gibt genau ein λ mit $P \overset{\rho}{\underset{\lambda}{\rightleftarrows}} Q$.*
Dies impliziert:

3) *ρ bewahrt Infima.*

Die Umkehrung gilt, falls Q vollständig ist.

Korollar 3.10 *Für $\varphi : P \to Q$ sind äquivalent:*

1) *Urbilder von Hauptidealen sind duale Hauptideale.*

2) *Es gibt genau ein ψ, so dass (φ, ψ) eine Galoisverbindung ist.*

Dies impliziert:

3) $\varphi(\bigvee Y) = \bigwedge \varphi^{\to}(Y)$.

Die Umkehrung gilt, falls P vollständig ist.

Satz 3.11 Jürgen Schmitt (1950)
Ist $P \overset{\rho}{\underset{\lambda}{\rightleftarrows}} Q$ eine Adjunktion, so ist $\tilde{P} \overset{\tilde{\rho}}{\underset{\tilde{\lambda}}{\rightleftarrows}} Q$. mit $\tilde{P} = \rho^{\to}(Q)$ und $\tilde{Q} = \lambda^{\to}(P)$ ein Paar zueinander inversen Isomorphismen, wobei $\tilde{\lambda}(p) = \lambda(p)$ und $\tilde{\rho}(q) = \rho(q)$ ist.
Sind umgekehrt $\tilde{\lambda} : \tilde{P} \to \tilde{Q}$ und $\tilde{\rho} : \tilde{Q} \to \tilde{P}$ zueinander inverse Isomorphismen zwischen einem Hüllenbereich $\tilde{P} \subseteq P$ und einem Kernbereich $\tilde{Q} \subseteq Q$, so gibt es ganeu eine Adjunktion $P \overset{\rho}{\underset{\lambda}{\rightleftarrows}} Q$, so dass das Diagramm **??** *kommutiert.*

Kapitel 4

Boolsche Algebren, Heyting-Algebren und Lokale

Definition:

Ein komplementierter, distributiver Verband heißt *Boolscher Verband*. Man nennt ihn weiterhin *Boolsche Algebra* (BA), falls die nullstelliigen Operationen $0 = \bot$ und $1 = \top$, sowie die einstellige Komplementoperation $'$ hinzugenommen werden.

Die Theorie der BA geht eigentlich auf Ernst Schröder und nicht auf George Boole zurück. Boole betrachtete nur Summen disjunktiver Klassen (vgl. Grassmann; bei Boole fehlt die Idempotenz der Summation $x+x=x$).

Literatur: Der Operationskreis des Logik Kalkuls - 1877; E. Schröder

Schröders Axiome, die auch wir im folgenden voraussetzen werden, sind die Kommutations- und Assoziationsgesetze, sowie die Idempotenzgesetze. Dies ergibt eine Struktur, die (mit zwei Halbverbandsoperationen) später *bisemilattice* genannt wurde.

Hinzu kommt ein Distributionsgesetz $x(y+z) = xy+xz$, woraus das duale Gesetz folgen sollte; hierzu ist aber ein weiteres Axiom notwendig (s.u.).

Beispiel:

Sei $(S,+) = (S,\cdot)$ ein Halbverband, dann erfüllt $(S,+,\cdot)$ alle bisherigen Gesetze, inklusive des dualen Distributionsgesetz $x + yz = (x+y)(x+z)$.

Weiterhin haben wir aus der Komplementiertheit die Komplementgesetze

$$\forall\, x \exists\, x' : \qquad xx' = 0, \quad x + x' = 1.$$

Hieraus folgen sofort $x \cdot 0 = 0, \quad x + 1 = 1$, da

$$x \cdot 0 \overset{kompl}{=} xxx' \overset{idem}{=} xx' \overset{kompl}{=} 0,$$

(entsprechend dual, im weiteren 0'- und 1'-Gesetze genannt) und $x+0 = x \cdot 1$, da

$$x + 0 \overset{idem}{=} xx + 0 \overset{kompl}{=} xx + xx' \overset{distr}{=} x(x + x') \overset{kompl}{=} x \cdot 1.$$

Wie das obige Beispiel zeigt folgt daraus nicht, daß $x + 0 = x \cdot 1 = x$, daher setzen wir auch dies als Axiom voraus (0-Gesetz oder 1-Gesetz).

Korollar 4.1 *Es gilt die Absorbtion.*

Beweis:

$$a(a + b) \overset{distr}{=} aa + ab \overset{idem}{=} a + ab \overset{distr}{=} a(1 + b) \overset{1'}{=} a1 \overset{1}{=} a$$

und

$$a + ab \overset{1}{=} a1 + ab \overset{distr}{=} a(1 + b) \overset{1',1}{=} a.$$

□

Nun folgt auch das duale Distributionsgesetz:

$$(a+b)(a+c) \overset{distr}{=} aa+ac+ba+bc \overset{idem}{=} a+ac+ab+bc \overset{abs}{=} a+ab+bc \overset{abs}{=} a+bc.$$

Lemma 4.2 *In einem boolschen Verband L gibt es zu je zwei Elementen x und z genau ein Element $z \backslash x$, so daß für alle $y \in L$ gilt*

$$z \leq x \vee y \quad \Leftrightarrow \quad z \backslash x \leq y.$$

Das Element $z \backslash x$ ist die mengentheoretische Differenz; wir setzen $z \backslash x = z \wedge x'$.

Beweis: '$\Rightarrow$'

$$\begin{aligned} z \backslash x \quad &= \quad z \wedge x' \overset{vorr}{\leq} (x \vee y) \wedge x' \\ &\overset{distr}{=} \quad (x \wedge x') \vee (y \wedge x') \overset{kompl}{=} 0 \vee (y \wedge x') \overset{0}{=} y \wedge x' \overset{abs}{\leq} y \end{aligned}$$

Beweis: '$\Leftarrow$'

$$z \overset{1}{=} z \wedge 1 \overset{kompl}{=} z \wedge (x \vee x') \overset{distr}{=} (z \wedge x) \vee (z \wedge x') \overset{vorr}{\leq} x \vee y.$$

Die Eindeutigkeit liegt in der Definition begründet.

$\square$

Dual gilt: In einem Boolschen Verband gibt es zu je zwei Elementen x, z genau ein Element $x \to z$, so daß für alle $y \in L$ gilt

$$x \wedge y \leq z \quad \Leftrightarrow \quad y \leq x \to z.$$

Definition:

In einem $\wedge$-Halbverband S mit $\perp$ heißt ein Element $x^\perp$ *Pseudokomplement* oder *$\wedge$-Komplement von x*, falls

$$x \wedge y = \perp \quad \Leftrightarrow \quad y \leq x \to z.$$

Für das *duale Pseudokomplement* oder *$\vee$-Komplement* $x_\top$ in $\vee$-Halbverbändern gilt entsprechend

$$x \vee y = \top \quad \Leftrightarrow \quad y \geq x_\top.$$

Beispiele:

1) In einem Boolschen Verband ist das eindeutige Komplement sowohl $\wedge$- als auch $\vee$-Kopmlement, und wie wir später sehen werden ist ein Verband, bei dem das $\wedge$- gleich dem $\vee$-Komplement ist, boolsch.

2) Das Pentagon ist $\wedge$- und $\vee$-komplementiert, aber nicht boolsch, da die Komplemente nicht gleich sind ($y^\perp = x \neq z = y_\top$).

3) Der Diamant ist weder $\wedge$- noch $\vee$-komplementiert an den drei mittleren Atomen.

4) Jeder endliche distributive Verband ist $\wedge$- und $\vee$-komplementiert, aber nicht unbedingt boolsch (Beweis später).

5) Der Teilerverband T_0 ist distributiv und $\vee-$, aber nicht $\wedge$-komplementiert. Desgleichen $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \cup \infty$.

6) Jede Topologie ist $\wedge$-komplementiert aber selten $\vee$-komplementiert. Für offenes $U \subseteq X$ ist $(X \backslash U)^\circ$ das $\wedge$-Komplement.

Definition:

Gilt für je drei Elemente x, z und $x \to z$ aus einem $\wedge$-Halbverband S

$$x \wedge y \leq z \quad \Leftrightarrow \quad y \leq x \to z$$

für alle $y \in S$, so heißt $x \to z$ *relatives Pseudokomplement* oder *relatives $\wedge$-Komplement von x bezüglich z.*

Schreibweisen: x^z (Spezialfall: $x^\perp$), z^x (Ähnlichkeit zur Menge der Funktionen von x nach z), $z : x$ (als komplementierte Funktion zu $\wedge = \cdot$) oder $x \star z$ (weil dies keine weitere Bedeutung impliziert).

Dual definiert sich das *relative* $\vee-$*Komplement* $z \backslash x$.

Lemma 4.3 *Jeder relativ $\wedge$-komplementierte $\wedge$-Halbverband mit $\perp$ ist $\wedge$-komplementiert. Es ist x^z das größte Element von $I_x^z := \{y \in S : \; x \wedge y \leq z\}$*

Bemerkung: Die Umkehrung gilt nicht (Pentagon).

Lemma 4.4 *Folgende Aussagen sind für einen Verband L äauivalent:*

a) *Jedes I_x^z ist ein Ideal in L.*

b) $y_1, y_2 \in I_x^z \quad \Rightarrow \quad y_1 \vee y_2 \in I_x^z$

c) $X \wedge y_1 \leq z$ *und* $x \wedge y_2 \leq z \quad \Rightarrow \quad x \wedge (y_1 \vee y_2) \leq z$, *und insbesondere* $z = (x \wedge y_1) \vee (x \wedge y_2)$

d) *L ist distributiv.*

Also folgt aus der Existenz aller $z - \wedge$-Komplemente die Distributivität.

Im folgenden betrachten wir allgemeiner eine Halbgruppe S anstelle eines Halbverbands. **Definition:**

Eine (*links*) *residuierte Halbgruppe* ist eine Halbgruppe S mit einer Irdnung $\leq$, so daß zu $x, z \in S$ ein eindeutiges $z : x$ existiert mit

$$xy \leq z \quad \Leftrightarrow \quad y \leq z : x.$$

D.h. die (links-)Translationen $\lambda_x : y \mapsto xy$ haben obere Adjungierte $\rho_x : z \mapsto z : x$.

Beispiele:

1 $z - \wedge$-komplementierte Halbverbände

2 Geordnete Gruppen mit isotonen Translationen, z.B. $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ oder $(\mathbb{R}, \cdot, \leq)$

Korollar 4.5 *In einer residuierten Halbgruppe S gilt:*

1) *Die Links-Translationen bewahlren beliebige Suprema. Ist S ein vollständiger Verband, so gilt auch die Umkehrung.*

2) Falls die Multiplikation kommutativ ist, hat man für jede Abbildung $\Psi_z : x \mapsto x : z$ eine Galois-Verbindung (Ψ_z, Ψ_z). Insbesondere gilt dann $z : \bigvee W = \bigwedge\{z : x \mid x \in W\}$.

Beweis:

1) klar, da untere Adjungtionen Suprema bewahren.

2) $x \leq \Psi_z(y) = z : y \Leftrightarrow yx \leq z \Leftrightarrow xy \leq z \Leftrightarrow y \leq z : y = \Psi_z(x)$

Umkehrung: Falls λ_x beliebige Suprema bewahrt, so hat es im vollständigen Fall eine obere Adjungierte.

□

Motivation:

Die Intuitionisten lehnen die Äquivalenz $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ ab. Etwas, daß nicht wahr ist, muß also nicht unbedingt falsch sein. Mit der Folgerung $\to$ als neues Operatorsymbol, kann man die Negation weglassen, da es nun anstelle von „falsch“ ($\neq p$) den Begriff „widerlegbar“ ($p \to \perp$) gibt.

Im folgenden betrachten wir das verbandstheoretische Modell der intuitionstischen Logik:

Definition:

Ein realtiv pseudokomplementierter Halbverband heißt *Brouwerscher Verband.*

Wir betrachten schwächer einen pseudokomplementierten Halbverband S.

Korollar 4.6 *Die Funktion $\Psi : S \to S$, $x \mapsto x^\perp$ liefert eine Galoisverbindung (Ψ, Ψ).*

Insbesondere ist $\Psi^2 : S \to S$, $x \mapsto x^{\perp\perp}$ eine Hüllenoperation.

Satz 4.7 *(Rechenregeln für Pseudokomplemente)*

a) $x \leq y \quad \Rightarrow \quad y^\perp \leq x^\perp \quad \Rightarrow \quad x^{\perp\perp} \leq y^{\perp\perp}$

b) $x \leq x^{\perp\perp}$

c) $x^\perp = x^{\perp\perp\perp}$

d) $x^\perp \wedge x = \perp = x^\perp \wedge x^{\perp\perp}$

e) $x \wedge (x \wedge y)^\perp = x \wedge y^\perp$

f) $(x \wedge y)^\perp = (x \wedge y^{\perp\perp}) = (x^{\perp\perp} \wedge y^{\perp\perp})$

g) $(x \wedge y)^{\perp\perp} = x^{\perp\perp} \wedge y^{\perp\perp}$

Beweis:

a) aus Galouisverbindung
b) aus Hüllenoperator
c) folgt aus a und b
d)
e) Es gilt $x \wedge y \leq y \overset{a}{\Rightarrow} y^{\perp} \leq (x \wedge y)^{\perp} \Rightarrow x \wedge y^{\perp} \leq x \wedge (x \wedge y)^{\perp}$. Nach d gilt $(x \wedge y) \wedge (x \wedge y)^{\perp} = \perp$ also folgt $x \wedge (x \wedge y)^{\perp} \leq y^{\perp}, \leq x,\ x \wedge y^{\perp}$.
f) Nach b ist $x \wedge y \leq x \wedge y^{\perp\perp}$ also ist nach a $(x \wedge y^{\perp\perp})y^{\perp} \leq (x \wedge y)^{\perp}$.
Aus d und e folgt nun $x \wedge (x \wedge y)^{\perp} \wedge y^{\perp\perp} \overset{e}{=} x \wedge y^{\perp} \wedge y^{\perp\perp} \overset{d}{=} x \wedge \perp = \perp$ und daraus $(x \wedge y)^{\perp} \leq (x \wedge y^{\perp\perp})^{\perp}$.
Wiederholt für $x^{\perp\perp}$.
g) Aus f ergibt sich $(x \wedge y)^{\perp\perp} = (x^{\perp\perp} \wedge y^{\perp\perp})^{\perp\perp} = x^{\perp\perp} \wedge y^{\perp\perp}$, da $x^{\perp\perp}$ und $y^{\perp\perp}$ Hüllenelemente sind und Hüllenoperationen gegen Infima abgeschlossen sind.

□

Beispiel:

Der gezeigte Halbverband ist distributiv und endlich, also brouwersch und insbesondere pseudokomplementiert. Wird dieser auf die Menge der Pseudokomplemente eingeschränkt, so ergibt sich ein Boolscher Verband. Dies ist zum einen erstaunlich, da die Distributivität erhalten bleibt, während Eigenschaften wie Komplementiertheit und Supremum kostenlos dazukommen, und zum zweiten, da dies auf jede Einschränkung auf Pseudokomplemente (*Skelett*) zutrifft, wie der folgende Satz beweist.

Satz 4.8 *(Glivenko 1928; Frink 1963)*

Für jeden ($\wedge$-)pseudokomplementierten Halbverband ist die Abbildung $\Psi^2 : S \to S;\ x \mapsto x^{\perp\perp}$ eine $\wedge$-bewahrende Hüllenoperation. Der zugehörige Hüllenbereich (Skelett)

$$S^{\perp\perp} = S^{\perp} = \{x^{\perp} :\ x \in S\} = \{y \in S :\ y = y^{\perp\perp}\}$$

ist ein Boolscher Verband mit Komplement $x^{\perp}$ und Supremum

$$s := x \overset{\perp}{\vee} y = (x^{\perp} \wedge y^{\perp})^{\perp}.$$

Beweis:

Es sind $\perp$ und $\top$ zueinander komplementär, daher sind beide in jedem Falle in $S^{\perp}$ enthalten.

Zunächst: $x^{\perp} \wedge y^{\perp} \leq x^{\perp},\ y^{\perp} \overset{4.7a}{\Rightarrow} x^{\perp\perp},\ y^{\perp\perp} \leq (x^{\perp} \wedge y^{\perp})^{\perp} = s$. Da $x = x^{\perp\perp}$ in $S^{\perp}$ ist also s obere Schranke von x und y.

Weiterhin: Ist $x,\ y \leq z = z^{\perp\perp}$, so folgt $z^{\perp} \leq x^{\perp},\ y^{\perp}$, also $z^{\perp} \leq x^{\perp} \wedge y^{\perp}$. Mit (4.7) a ist s also die kleinste obere Schranke und damit das Supremum.

Nach (4.7) d ist $x^{\perp} \wedge x^{\perp\perp} = \perp$ also ist $x^{\perp} \overset{\perp}{\vee} x^{\perp\perp} = (x^{\perp\perp} \wedge x^{\perp\perp\perp})^{\perp} = \perp^{\perp} = \top$, also ist $x^{\perp}$ das Komplement von x.

Schließlich ist ist das Skelett brouwersch, denn es gibt ein relatives Pseudokomplement $y^z := (y \wedge z^{\perp})^{\perp}$.

$$x \wedge y \leq z \quad \overset{\text{in } S^{\perp}}{\Leftrightarrow} \quad x \wedge y \leq z^{\perp\perp} \quad \Leftrightarrow \quad x \wedge (y \wedge z^{\perp}) = \perp \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y^z.$$

Brouwersch ist insbesondere distributiv, damit schließlich ist das Skelett $S^{\perp}$ ein Boolscher Verband.

$\square$

Korollar 4.9 *Falls S ein Verband ist, ist die Abbildung $x \mapsto x^{\perp\perp}$ ein Verbandshomomorphismus von S auf $S^{\perp}$.*

Beweis: Wegen (4.7) f bewahrt die Abbildung Infima, wegen der Definition von $\overset{\perp}{\vee}$ Suprema und als untere Adjungierte sogar beliebige Suprema.

$\square$

Korollar 4.10 *Ist L ein Lokal (insbesondere pseudokomplementiert), so ist $\Psi^2 : L \to L^{\perp}$ ein Lokal-Homomorphismus auf einem vollständigen Boolschen Verband.*

Exkurs: Regulär offene Mengen

Regulär offene Mengen sind diejenigen offenen Mengen, die gleich dem offenen Kern ihren Abschlusses sind. Die Menge ist nicht gegen Vereinigungen abgeschlossen; so sind in $\mathbb{R}$ die Intervalle (a, b) und (b, c) zwar jeweils offen, aber der Kern des abschlusses beiden Mengen enthält zusätzlich den Punkt b, somit ist die Vereinigung der beiden offenen Intervalle keine regulär offene Menge.

Verbandstheoretisch aber ist die Vereinigung das Supremum, welches seinerseits als Kern des Abschlusses definiert ist; damit ist der Verband der regulär offenen Mengen gegen Vereinigung abgeschlossen.

Beliebige Durchschnitte offener Mengen müssen nicht einmal offen sein. Verbandstheoretisch aber ist das Infimum der Kern des Durchschnitts, und dieser ist offen.

Das Komplement ist $U^\perp = (X \backslash U)^\circ$ und

$$U^{\perp\perp} = \Big(X \backslash (X \backslash U)^\circ\Big)^\circ = \Big(\overline{X \backslash (X \backslash U)}\Big)^\circ = \overset{\circ}{\overline{U}} \,.$$

Korollar 4.11 *Für jede Topologie $\mathcal{T}$ auf X ist das System $\mathcal{T}^{\perp\perp} = \{U \in X : U = U^{\perp\perp} = \overset{\circ}{\overline{U}}\}$ der regulär offenen Mengen ein vollständiger Boolscher Verband.*

Satz 4.12 *Sei $\phi : S \to S$ ein idempotenter $\wedge$-Homomorphismus eines $\wedge$-Halbverbands S und*

$$F_\phi = \{x \in S : \ x = \phi(x)\} = \phi^{\rightarrow} S$$

seine Fixpunktmenge. Dann ist F_ϕ wieder ein $\wedge$-Halbverband. Falls S vollständig ist, au ist es auch F_ϕ. Ist x^z ein Pseudokomplement von x bezüglich z in S, so ist $\phi(x^z)$ ein Pseudokomplement von x bezüglich z in F_ϕ.

Beweis:
Abgeschlossenheit gegen Infima: $\phi(x) \wedge \phi(y) = \phi(x \wedge y) \in F_\phi$.
Pseudokomplement: Ist x das Supremum von $Y \subseteq F_\phi$ in S, so ist $\phi(x)$ das Supremum von $\phi^{\rightarrow} Y = Y$ in F_ϕ: Für $y \in Y$ ist $\phi(y) \leq \phi(x)$, da ϕ isoton ist. Also ist $\phi(x)$ obere Schranke, z.Z. kleinste! Ist z eine obere Schranke von Y in F_ϕ, so folgt $x \leq z$, also auch $\phi(x) \leq \phi(z) = z$. $x \wedge y \leq z \quad \Leftrightarrow \quad y \leq x^z$. Für $x, y, z \in F_\phi$ folgt $x \wedge y \leq z \quad \Rightarrow \quad y = \phi(y) \leq \phi(x^z)$. Also

$$x \wedge y \leq x \wedge \phi(x^z) = \phi(x) \wedge \phi(x^z) = \phi(x \wedge y^z) \leq \phi(z) = z.$$