Diskrete Strukturen

Marcel Erné

Leibniz Universität Hannover
Fakultät für Mathematik und Physik

Vorlesung
für
Studierende des Bachelor-Studienganges
Angewandte Informatik
Sommersemester 2009

3. Graphentheorie

Inhaltsverzeichnis

2 Graphentheorie

In diesem Kapitel widmen wir uns einigen elementaren, aber reizvollen Themen aus der Theorie der (schlichten) Graphen, also der irreflexiven und symmetrischen Digraphen (X, S). Die Relation S ist hier eindeutig durch die Menge

$$E_S \ = \{xy = \{x, y\} \mid x\, S\, y\}$$

der *Kanten (edges)* festgelegt, und umgekehrt gibt es zu jeder Teilmenge E von

$$\mathcal{P}_2 X = \{xy \mid x, y \in X, x \neq y\} = \{Y \subseteq X \mid |Y| = 2\},$$

der Menge aller zweielementigen Teilmengen von X, genau einen Graphen (X, S) mit $E = E_S$, nämlich denjenigen mit der irreflexiven und symmetrischen Relation $S = \{(x, y) \mid xy \in E\}$. Deshalb werden wir der gängigen Konvention folgen, auch die Paare (X, E) mit $E \subseteq \mathcal{P}_2 X$ *Graphen* zu nennen.

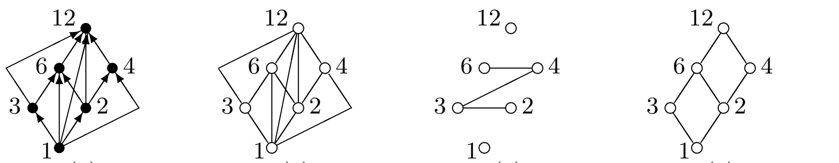
Wie der Name schon sagt, lassen sich zumindest alle endlichen Graphen leicht graphisch veranschaulichen, indem man die *Ecken* oder *Knoten (vertices)*, also die Elemente der Grundmenge X, durch Punkte oder kleine Kreise in der Ebene darstellt und je zwei solche durch eine Linie (Kante) verbindet, wenn die entsprechenden Ecken des Graphen eine Kante xy bilden. Man sagt in diesem Fall: x und y *inzidieren* mit der Kante xy, oder x und y sind *adjazent* (die deutsche Übersetzung *"benachbart"* vermeiden wir, um Verwechslungen mit dem gleichlautenden ordnungstheoretischen Begriff auszuschließen). Im Fall $X = \{x_1, ..., x_m\}$ ist die zugehörige (symmetrische!) *Inzidenz-* oder *Adjazenzmatrix* $A = (a_{ij}) \in \{0, 1\}^{m \times m}$ gegeben durch

$$a_{ij} = 1 \ \Leftrightarrow \ x_i x_j \in E.$$

Beachten Sie, daß in der Graphentheorie die gezeichneten Darstellungen eine andere Bedeutung haben als in der Ordnungstheorie: Während dort nur aufsteigende Kanten vorkommen und stets als von unten nach oben gerichtet angesehen werden, haben Kanten in der Graphentheorie keine Orientierung, können also stets "in beiden Richtungen (und auch waagerecht) durchlaufen" werden. Trotzdem bestehen enge Verbindungen zwischen beiden Theorien: Indem man Pfeilspitzen wegläßt, also die entsprechende Relation symmetrisiert, erhält man

(1) *zu jeder geordneten Menge* $(X, \sqsubseteq)$
(2) *den Vergleichbarkeitsgraphen* $(X, \sqsubset^s)$ mit $x \sqsubset^s y \ \Leftrightarrow\ x \sqsubset y$ oder $y \sqsubset x$,
(3) *den Unvergleichbarkeitsgraphen* $(X, \sqsubseteq^{cs})$ mit $x \sqsubseteq^{cs} y \ \Leftrightarrow\ x \not\sqsubseteq y$ und $y \not\sqsubseteq x$,
(4) *und den Nachbarschaftsgraphen* $(X, \sqsubset^{\vee s})$ mit $x \sqsubset^{\vee s} y \ \Leftrightarrow\ x \sqsubset^{\vee} y$ oder $y \sqsubset^{\vee} x$.

Beispiel 2.1 *Die geordnete Menge der Teiler von* 12 *und ihre Graphen*



(1) (2) (3) (4)

2.1 Isomorphie

Von essentieller Bedeutung in der Graphentheorie (und überhaupt in allen strukturellen Untersuchungen) ist die Möglichkeit zu entscheiden, wann zwei Strukturen “im wesentlichen gleich” sind, d.h. durch geeignete Umbenennung ihrer Elemente auseinander hervorgehen. Hierzu braucht man den Begriff der *Isomorphie (Gleichgestaltigkeit)*, den wir in Kapitel 1 schon kennengelernt haben.

Es seien zwei Digraphen (X, R) und (X', R') gegeben. Dann heißt eine Abbildung $\varphi : X \longrightarrow X'$

- *inzidenz-erhaltend*, falls $x\,R\,y \Rightarrow \varphi(x)\,R'\,\varphi(y)$
- *inzidenz-reflektierend*, falls $x\,R\,y \Leftarrow \varphi(x)\,R'\,\varphi(y)$
- *Quasi-Einbettung*, falls $x\,R\,y \Leftrightarrow \varphi(x)\,R'\,\varphi(y)$

für alle $x, y \in X$ gilt. Eine *Einbettung* ist eine injektive Quasi-Einbettung, und ein *Isomorphismus* eine bijektive Einbettung. Entsprechend ist ein Isomorphismus zwischen Graphen (X, E) und (X', E') eine Bijektion $\varphi : X \longrightarrow X'$ mit

$$xy \in E \;\Leftrightarrow\; \varphi(x)\varphi(y) \in E'.$$

Die Bezeichnungen

$$\varphi^+(R) = \{(\varphi(x), \varphi(y)) \mid x\,R\,y\} \text{ und } \varphi^-(R') = \{(x, y) \in X{\times}X \mid \varphi(x)\,R'\varphi(y)\}$$

erlauben folgende kurze Charakterisierungen der obigen Eigenschaften:

φ ist inzidenz-erhaltend	$\Leftrightarrow$	$R \subseteq \varphi^-(R') \;\Leftrightarrow\; \varphi^+(R) \subseteq R'$
φ ist inzidenz-reflektierend	$\Leftrightarrow$	$R \supseteq \varphi^-(R')$
φ ist eine Quasi-Einbettung	$\Leftrightarrow$	$R = \varphi^-(R')$
φ ist eine Einbettung	$\Leftrightarrow$	$R = \varphi^-(R')$ und φ ist injektiv
φ ist ein Isomorphismus	$\Leftrightarrow$	$R = \varphi^-(R')$ und φ ist bijektiv.

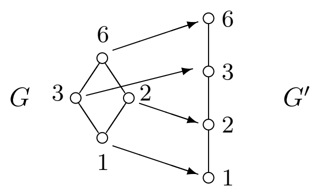
Beispiel 2.2 *Zwei nicht-isomorphe geordnete Mengen*

Wir betrachten die Menge $X = \{1, 2, 3, 6\}$, einmal mit der Teilbarkeitsrelation $|$ und einmal mit der gewöhnlichen linearen Ordnung $\leq$; so erhalten wir zwei geordnete Mengen $G = (X, |)$ und $G' = (X, \leq)$. Die Identität id_X ist dann

– inzidenz-erhaltend, aber nicht -reflektierend als Abbildung von G nach G',

– inzidenz-reflektierend, aber nicht -erhaltend als Abbildung von G' nach G,

denn es gilt $x\,|\,y \;\Rightarrow\; x \leq y$ für beliebige natürliche Zahlen x, y, während die Umkehrung $x \leq y \;\Rightarrow\; x\,|\,y$ für $x = 2$ und $y = 3$ falsch ist.



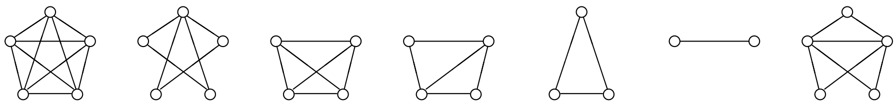
Beachten Sie, daß es keine inzidenz-erhaltende Bijektion zwischen den beiden Diagrammen (aufgefaßt als Nachbarschaftsgraphen) gibt!

Ein Graph T ist *Teilgraph* eines Graphen G, wenn sowohl seine Eckenmenge als auch seine Kantenmenge in der von G enthalten ist. Das bedeutet nichts anderes, als daß die *Inklusionsabbildung* von T in G (die jede Ecke auf sich selbst abbildet) die Inzidenz erhält. Ist sie sogar eine Einbettung, so spricht man von einem *induzierten (Teil-)Graphen.* Analog bildet man für Digraphen (X, R) und Teilmengen $Y \subseteq X$ die *von R auf Y induzierte Relation*

$$R|_Y = R \cap (Y \times Y)$$

und nennt $(Y, R|_Y)$ einen *induzierten Digraphen.* Für einen Graphen $G = (X, E)$ und eine *Eckenmenge* $Y \subseteq X$ wird der auf $X \setminus Y$ induzierte "Restgraph" mit $G - Y$ bezeichnet. Entsprechend bezeichnet man für eine *Kantenmenge* $K \subseteq E$ den Graphen $(X, E \setminus K)$ mit $G - K$.

Beispiel 2.3 *Einige Teilgraphen des vollständigen Graphen mit 5 Ecken*



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

(a) Gleiche Eckenmenge, nicht induziert.
(b) Verschiedene Eckenmenge, induziert.
(c) Teilgraph, verschiedene Eckenmenge, nicht induziert.
(d) eingebettet in (a), (b), (c), aber kein Teilgraph von (a), (b) oder (c).
(e) Restgraph nach Entfernen der Knoten aus (d).
(f) Restgraph nach Entfernen der Kanten aus (d).

Viele wichtige Eigenschaften von Graphen lassen sich durch Existenz oder Ausschluß bestimmter Teilgraphen charakterisieren. Spezielle induzierte Teilgraphen sind die sogenannten *n-Ecke.* Das sind die induzierten Teilgraphen mit n Ecken, die einen Zykel bilden. Ein Nachbarschaftsgraph ist stets "dreiecksfrei", d.h. er enthält keine Dreiecke als Teilgraphen. Kein Vergleichbarkeitsgraph enthält ein induziertes n-Eck mit einer ungeraden Kantenzahl $n > 3$. (Warum?)

Im Folgenden darf jeweils das Wort "Graph" durch "Digraph" ersetzt werden. Zwei Graphen G und G' heißen *isomorph*, in Zeichen $G \simeq G'$, falls ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert. Dies liefert ein Äquivalenzrelation auf jeder Menge von Graphen; denn die Verknüpfung zweier Isomorphismen und die zu einem Isomorphismus inverse Abbildung sind wieder Isomorphismen. Die Isomorphieklassen oder speziell ausgewählte Vertreter dieser Klassen nennt man auch *Isomorphietypen.*

Unter einer *Symmetrie* oder einem *Automorphismus* eines Graphen G vesteht man einen Isomorphismus zwischen G und sich selbst. Jeder Graph besitzt einen trivialen Automorphismus, nämlich die Identität id_X. Die Automorphismen eines festen Graphen G bilden aus dem gleichen Grund wie oben eine Gruppe, die *Symmetriegruppe* $S(G)$. Offenbar besitzt ein Graph $G = (X, E)$ stets genau die gleichen Symmetrien wir der *komplementäre Graph*

$$\overline{G} = (X, \mathcal{P}_2 X \setminus E).$$

Da die Summe der beiden Kantenzahlen von G und $\overline{G}$ bei m Ecken $m(m-1)/2$ ergibt, kann ein Graph nur dann zu seinem Komplement isomorph sein, wenn seine Kantenzahl $m(m-1)/4$ beträgt; das ist natürlich nur dann möglich, wenn $m(m-1)/2$ gerade ist, also z.B. nicht für $m = 10$.

Bei der strukturellen Untersuchung eines Graphen G interessieren naturgemäß zwei Zahlen:

(1) die Anzahl $a(G)$ der Automorphismen (Symmetrien) von G,

(2) die Anzahl $i(G)$ der zu G isomorphen Graphen mit gleicher Eckenmenge.

Nach Satz 1.12 kann man jede dieser beiden Zahlen sofort aus der anderen berechnen:

Satz 2.4 *Für jeden endlichen (Di-)Graphen G mit m Ecken gilt*

$$m! = a(G)\,i(G).$$

Wieviele Graphen gibt es auf einer festen Menge von m Ecken? Genau so viele, wie es Teilmengen von $\mathcal{P}_2\underline{m}$ gibt, also

$$2^{\frac{1}{2}m(m-1)}.$$

Eine erheblich schwierigere Frage ist, wieviele *Isomorphietypen* von Graphen mit m Ecken es gibt. Wir können diese Anzahl $g(m)$ hier nicht allgemein berechnen, notieren aber die ersten Werte:

m	1	2	3	4	5	6
$g(m)$	1	2	4	11	34	156

Für $m = 1, 2, 3$ sieht man das sofort, und für $m = 4$ und 5 stellen wir in Kürze eine komplette Liste der Isomorphietypen auf.

Aufgrund von Satz 2.4 gilt allgemein

$$2^{\frac{1}{2}m(m-1)}/m! \le g(m) \le 2^{\frac{1}{2}m(m-1)},$$

und obwohl $m!$ schnell zu riesigen Zahlen anwächst, sind diese im Verhältnis zu den Zahlen $2^{m(m-1)/2}$ aller Graphen mit m Ecken doch verschwindend klein:

$$\log_2(m!) = \sum_{k=1}^{m} \log_2(k) \le m \log_2(m)$$

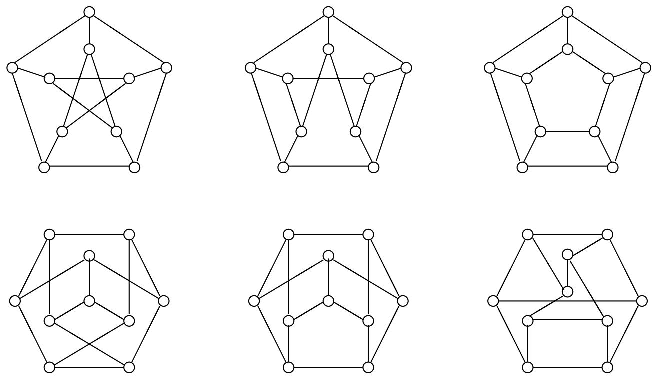
$$2^{\frac{1}{2}m^2(1-\frac{1}{m}-\frac{2\log_2 m}{m})} \le 2^{\frac{1}{2}m(m-1)}/m! \le g(m) \le 2^{\frac{1}{2}m^2(1-\frac{1}{m})},$$

$\log_2 g(m) \approx \frac{1}{2}m^2(1-\frac{1}{m})$, und $\frac{2\log_2 m}{m}$ geht fast so schnell gegen 0 wie $\frac{1}{m}$.

Zwei endliche Graphen sind genau dann zueinander isomorph, wenn sie eine übereinstimmende graphische Darstellung (eventuell mit unterschiedlicher Beschriftung der Knoten) besitzen. Es ist aber keineswegs immer einfach, von zwei Graphen anhand gegebener Zeichnungen festzustellen, ob sie isomorph sind – denn ein Graph kann sehr verschieden aussehende Darstellungen besitzen.

Beispiel 2.5 *Isomorph oder nicht?*

Von den nachfolgend skizzierten sechs Graphen mit jeweils 10 Knoten sind keine zwei in einer Reihe zueinander isomorph, während je zwei Diagramme in einer Spalte erstaunlicherweise den gleichen Graphen darstellen!



Die beiden Bilder in der ersten Spalte zeigen den *Petersen-Graph* $(\mathcal{P}_2 M, E)$ mit $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow x \cap y = \emptyset$ für eine fünfelementige Menge M. Hier ist $\mathcal{P}_2 M$ die Eckenmenge, nicht die Kantenmenge!

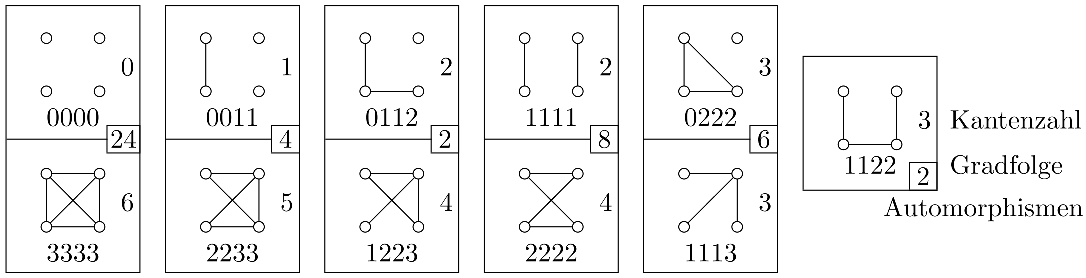
Einer von mehreren Isomorphismen zwischen den beiden Petersen-Graphen in Beispiel 2.5 klappt die waagerechte Kante des Drudenfußes nach oben und vertauscht seine beiden "Fußpunkte". Bei den beiden mittleren Graphen muß man nur die obere waagerechte Kante verschieben. Im dritten Fall (rechts) bildet man das Außenfünfeck im oberen Graphen auf das linke und das Innenfünfeck auf das rechte im unteren Graphen ab (oder umgekehrt).

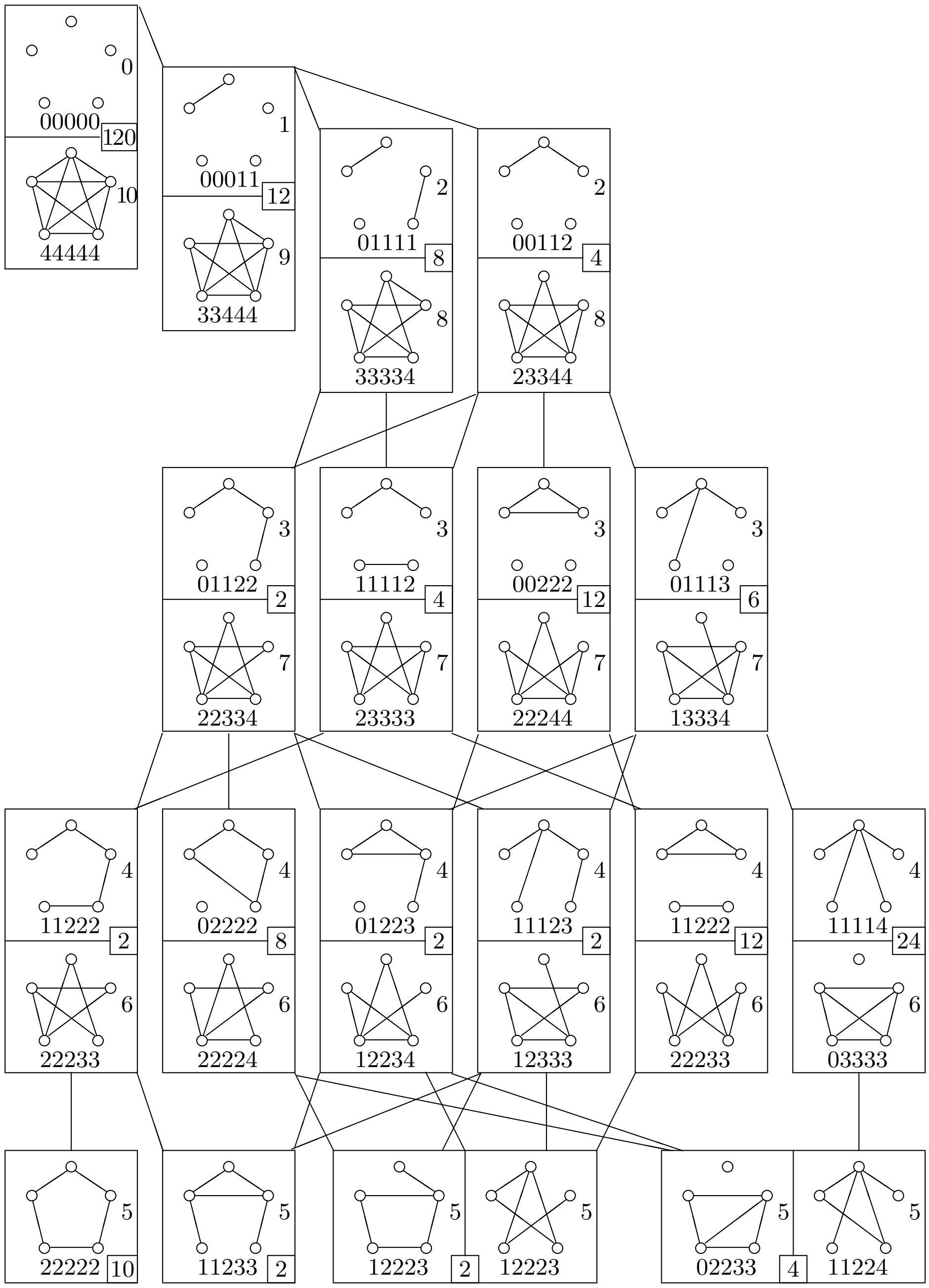
Sehr mühsam kann der Nachweis werden, daß zwei gegebene Graphen *nicht* isomorph sind, denn ohne schlaue Ideen müßte man bei m Ecken im Prinzip $m!$ Bijektionen testen. Glücklicherweise gibt es aber eine Vielzahl von sogenannten *Invarianten*, die bei Isomorphie übertragen werden. Erweist sich eine dieser Invarianten für zwei vorgegebene Graphen als verschieden, so ist man sicher, daß diese nicht isomorph sein können – ohne eine einzige Bijektion auszuprobieren!

Die zwei offensichtlichsten Invarianten sind die *Eckenzahl* und die *Kantenzahl*; denn ein Isomorphismus φ zwischen zwei Graphen (X, E) und (X', E') liefert nicht nur eine Bijektion zwischen den Ecken, sondern wegen $\varphi^+(E) = E'$ auch eine zwischen den Kanten. Die *Komponentenzahl* ist eine weitere Invariante, da ein Isomorphismus φ jeden Weg zwischen x und y auf einen Weg zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ abbildet. Daß diese Zahlen noch nicht sehr weit helfen, zeigen die Graphen in 2.5 (alle haben 10 Ecken, 15 Kanten und eine Komponente).

Eine sehr viel feinere Invariante liefert die sogenannte *Gradfolge*. Die Zahl der zu einer Ecke x in einem Graphen G adjazenten Ecken nennt man *Grad* oder *Valenz* von x und bezeichnet sie mit $d(x)$ oder genauer mit $d_G(x)$. Bei einer Ecke x eines Digraphen (X, R) unterscheidet man zwischen der *positiven Valenz* (Anzahl der "hinauslaufenden Pfeile") $d^+(x) = |\{y : x\,R\,y\}|$ und der *negativen Valenz* (Anzahl der "hineinlaufenden Pfeile") $d^-(x) = |\{y : y\,R\,x\}|$.

Die *Gradfolge* eines endlichen Graphen ist, wie der Name sagt, die Folge der einzelnen Eckengrade (eventuell mit Wiederholungen), meist in aufsteigender Reihenfolge. Da Isomorphismen die Adjazenz übertragen, müssen isomorphe Graphen identische Gradfolgen haben. Bei weniger als 5 Ecken kann man anhand der Gradfolgen entscheiden, ob zwei Graphen isomorph sind oder nicht. Die nächste Seite zeigt alle Isomorphietypen von Graphen mit 4 oder 5 Ecken.


0
0000
24
6
3333
1
0011
4
5
2233
2
0112
2
4
1223
2
1111
8
4
2222
3
0222
6
3
1113
3
1122
2
Kantenzahl
Gradfolge
Automorphismen


0
00000
120
10
44444
1
00011
12
9
33444
2
01111
8
8
33334
2
00112
4
8
23344
3
01122
2
7
22334
3
11112
4
7
23333
3
00222
12
7
22244
3
01113
6
7
13334
4
11222
2
6
22233
4
02222
8
6
22224
4
01223
2
6
12234
4
11123
2
6
12333
4
11222
12
6
22233
4
11114
24
6
03333
5
22222
10
5
11233
2
5
12223
2
5
12223
5
02233
4
5
11224

In den beiden Diagrammen ist jeweils ein Paar komplementärer Graphen zu einem "Dominostein" verbunden. Dazu haben wir Kantenzahl, Gradfolge und Anzahl $\boxed{\text{a}}$ der Symmetrien notiert. Im unteren Diagramm der fünfeckigen Graphen bedeuten die Verbindungskanten zwischen den einzelnen Dominosteinen, daß die jeweilige obere Hälfte des höheren Steines in die des tieferen einbettbar ist, während es sich bei den unteren (komplementären) Hälften natürlich gerade umgekehrt verhält. Nur der viereckige Graph in der rechten oberen Ecke und die beiden fünfeckigen Graphen in der linken unteren Ecke sind zu ihrem eigenen Komplement isomorph!

Leider zeigt unsere Liste der Graphen mit 5 Ecken, daß auch die Gradfolgen nicht ausreichen, um nicht-isomorphe Graphen stets zu unterscheiden: Der vorletzte Dominostein in der Liste zeigt zwei nicht-isomorphe, zusammenhängende und zueinander komplementäre Graphen mit 5 Ecken und gleicher Gradfolge. (Die einzigen weiteren Beispiele von Gradfolgen, zu denen zwei nicht-isomorphe Graphen mit 5 Ecken gehören, sind $(1,1,2,2,2)$ in der drittletzten Zeile des Diagramms und $(2,2,2,3,3)$ in der vorletzten Zeile des Diagramms).

Weitere Invarianten sind die *Vieleckfolgen* $(z_1, ..., z_m)$, wobei z_n die Anzahl der *n-Ecke* des gegebenen Graphen ist. Speziell ist z_1 die Zahl der Ecken, z_2 die der Kanten und z_3 die der Dreiecke. Auch hierin unterscheiden sich die zwei komplementären Graphen im mittleren unteren Dominostein: Die Vielecksfolgen lauten

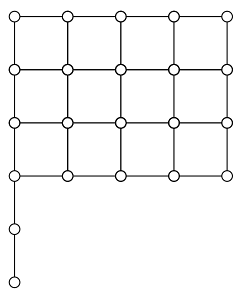
$(5,5,0,1,0)$ und $(5,5,1,0,0)$,

da der linke Graph ein Viereck, aber kein Dreieck enthält, während es bei dem rechten gerade umgekehrt ist.

Ein Graph ohne nicht-triviale Symmetrien heißt *asymmetrisch* oder *starr*. Gibt es überhaupt solche Graphen? Nach Definition ist jeder einpunktige Graph trivialerweise starr, aber die Listen der Graphen mit 4 oder 5 Ecken halten eine weitere kleine Überraschung bereit: Außer den einpunktigen Graphen gibt keinen einzigen starren Graphen mit weniger als 6 Ecken. Darf man daraus schließen, daß starre Graphen eine Rarität sind? Nein, im Gegenteil! Mit Methoden, die wir hier nicht erläutern können, läßt sich zeigen, daß der Anteil der starren Graphen mit m Ecken bei wachsendem m sogar gegen 1 geht, also "fast alle" Graphen starr sind – getreu dem Motto von Donald Knuth:

Don't trust in small numbers!

Beispiel 2.6 *Ein starrer Graph*

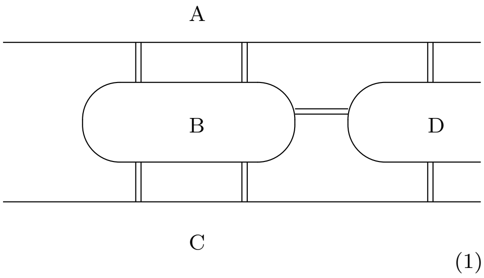


2.2 Eulersche und Hamiltonsche Wege

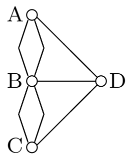
Als älteste Aufgabe der Graphentheorie gilt das von Leonhard Euler stammende

Königsberger Brückenproblem

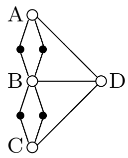
Gibt es einen Rundweg durch die Stadt Königsberg, bei dem man jede Brücke genau einmal besucht? ("Über sieben Brücken mußt du geh'n ...")



(1)



(2)

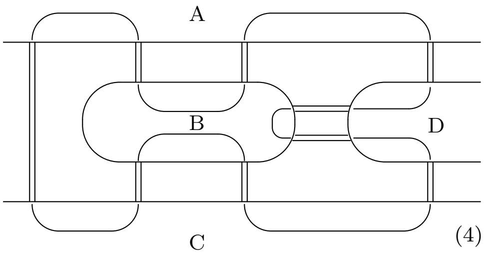


(3)

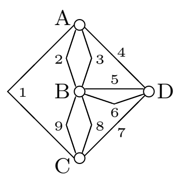
Bei graphentheoretischer Reduktion dieses Problems "auf das Wesentliche" bieten sich die vier Stadtteile $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ als Knoten und die sieben Brücken als Kanten an. Es ergibt sich das vereinfachte Diagramm (2). Allerdings haben wir es hier offenbar mit Mehrfachkanten, also mit keinem schlichten Graphen zu tun. Das spielt aber bei der Lösung des Problems keine Rolle: Indem wir auf jede Mehrfachkante (oder sogar auf jede Kante) einen weiteren Knoten setzen, entsteht ein schlichter Graph (3). Nach einigem Probieren kommt man zu der Überzeugung, daß es dennoch keine positive Lösung gibt: Stets bleibt man nach ein paar Schritten in einem Stadtteil stecken, weil keine weiteren Brücken zur Verfügung stehen, um diesen wieder zu verlassen. Wir fragen daher:

Wieviele zusätzliche Brücken müßte man bauen, um einen "Eulerschen Rundweg" zu ermöglichen?

Es ist naheliegend, daß an jeden Stadtteil eine gerade Anzahl von Brücken anschließen muß, damit man diesen stets wieder verlassen kann, nachdem man dort gelandet ist. Also bauen wir zwei weitere Brücken:



(4)

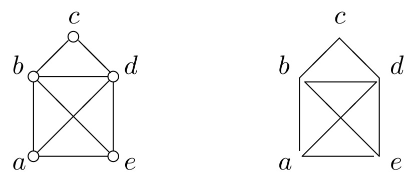


(5)

Und jetzt ist ein Rundweg schnell gefunden. Würden wir auf eine der beiden zusätzlichen Brücken 1 oder 6 verzichten, so bliebe immerhin noch ein Weg zwischen zwei Endpunkten, bei dem alle Brücken einmal besucht werden.

Zur allgemeinen Formulierung und Lösung des zuvor beschriebenen Problems nennt man eine Folge $K = (x_0x_1, x_1x_2, ..., x_{n-1}x_n)$ von paarweise verschiedenen *Kanten* eines Graphen $G = (X, E)$, wobei jeweils die nächste mit der vorherigen einen Endpunkt gemeinsam hat, einen *Kantenzug*. Eine Folge $(x_0, ..., x_n)$ von Ecken heißt *Eulerscher Weg*, falls $K = (x_0x_1, x_1x_2, ..., x_{n-1}x_n)$ ein Kantenzug mit $E = \{x_{i-1}x_i \mid i \in \underline{n}\}$ ist, also alle Kanten des Graphen genau einmal "durchlaufen" werden (Ecken dürfen mehrfach besucht werden). Der Weg ist *offen*, falls $x_0 \neq x_n$. Gilt hingegen $x_0 = x_n$, so spricht man von einem *Eulerschen Rundweg* oder einer *Euler-Tour* des Graphen G.

Beispiel 2.7 *Das Haus vom Nikolaus*
ist das bekannteste Beispiel eines Graphen, der mehrere Eulersche Wege, aber keinen Eulerschen Rundweg besitzt.



Jeder Euler-Weg hat hier die Endpunkte a und e, da dies die einzigen Ecken mit ungeradem Grad sind; zum Beispiel: $(a, b, c, d, e, b, d, a, e)$.

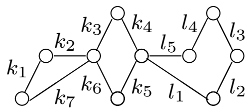
Und nun zum klassischen Satz von Euler (1736):

Satz 2.8 *Ein endlicher zusammenhängender Graph besitzt genau dann eine Euler-Tour, wenn jede seiner Ecken einen geraden Grad hat.*

Beweis. Die Notwendigkeit dieser Gradbedingung ist offensichtlich, denn bei einer Euler-Tour tritt jede Ecke ebenso oft als Endpunkt wie als Anfangspunkt einer Kante auf.

Um unter der Annahme, alle Eckengrade seien gerade, eine Euler-Tour zu konstruieren, kann man folgendermaßen vorgehen (und dieses Verfahren zu einem exakten Algorithmus ausbauen): Man startet mit einer beliebigen Ecke und bildet durch schrittweises Anhängen von neuen Kanten einen Kantenzug. Läßt sich ein solcher nicht mehr weiter verlängern, so muß der Endpunkt der letzten Kante mit der Startecke zusammenfallen (sonst würde der Endpunkt mit einer ungeraden Anzahl von Kanten inzidieren).

Enthält der so gebildete geschlossene Kantenzug $K = (k_1, ..., k_n)$ noch nicht alle Kanten des Graphen, so gibt es wegen des Zusammenhangs eine Kante l_1, die nicht zu K gehört, aber mit zwei aufeinanderfolgenden Kanten k_i und k_{i+1} eine gemeinsame Ecke besitzt. Da der durch Wegnahme von K entstehende Restgraph H wieder lauter Ecken geraden Grades hat, können wir einen weiteren geschlossenen Kantenzug $L = (l_1, ..., l_m)$ in H bilden, der zusammen mit K einen längeren geschlossenen Kantenzug $(k_1, ..., k_i, l_1, ..., l_m, k_{i+1}, ...k_n)$ liefert. Nach endlich vielen Iterationen dieses Verfahrens hat man alle Kanten des gesamten Graphen ausgeschöpft und damit eine Euler-Tour gefunden. $\square$



Für das "Haus vom Nikolaus" und analoge Aufgaben braucht man die "offene Variante" des Eulerschen Satzes:

Satz 2.9 *Ein endlicher zusammenhängender Graph besitzt genau dann einen offenen Euler-Weg, wenn alle bis auf zwei Ecken einen geraden Grad haben. Diese sind dann die Endpunkte eines jeden Euler-Weges.*

Man führt diesen Satz einfach auf den vorigen zurück, indem man die beiden Ecken ungeraden Grades mit einer neu hinzugefügten Ecke verbindet und so die Bedingung (a) in Satz 2.8 erfüllt. Der erweiterte Graph hat dann einen Eulerschen Rundweg, und nach Wegnahme der "Hilfsecke" (und der beiden Verbindungskanten) bleibt ein Eulerscher Weg im ursprünglichen Graphen übrig.

Auf die Zusammenhangsvoraussetzung in Satz 2.8 kann man noch verzichten, indem man die einzelnen Komponenten betrachtet. Unter einem *Kreis* in einem Graphen versteht man eine Folge $(x_0, ..., x_n)$ von mindestens drei Ecken, so daß $x_{i-1}x_i$ stets eine Kante ist und $x_i \neq x_j$ für alle $i < j < n$, aber $x_0 = x_n$ und $n \geq 3$ gilt. Alternativ nennt man auch den zugehörigen Kantenzug $(x_0x_1, x_1x_2, ..., x_{n-1}x_n)$ oder den entsprechenden Teilgraphen einen Kreis.

Satz 2.10 *Für einen endlichen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Der Grad jeder Ecke von G ist gerade.*

(b) *Die Kantenmenge von G zerfällt in kantendisjunkte Kreise.*

(c) *Jede Komponente von G besitzt eine Euler-Tour.*

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): Induktion nach der Anzahl der Kanten. Gibt es überhaupt keine Kanten, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls findet man ähnlich wie im Verfahren zum Beweis von Satz 2.8 einen Kreis K, und im Restgraphen, der durch Herausnahme von K entsteht, haben wieder alle Ecken einen geraden Grad. Nach Induktionsannahme kann die Kantenmenge dieses Restgraphen in disjunkte Kreise zerlegt werden. Durch Hinzunahme des Kreises K bekommen wir eine Zerlegung der Kantenmenge von G in Kreise.

(b)$\Rightarrow$(c). Die Kantenmenge einer Komponente Z ist nach (b) disjunkte Vereinigung von Kreisen (denn jeder Kreis ist zusammenhängend, liegt also ganz in einer Komponente). Sei Y eine maximale Vereinigung solcher Kreise, die eine Euler-Tour $(k_1, ..., k_n)$ enthält. Unter der Annahme, daß Y echt in Z enthalten ist, finden wir wegen des Zusammenhangs von Z eine Kante l_1 in $Z \setminus Y$, die mit einer Kante k_i aus Y einen Endpunkt gemeinsam hat. Diese Kante liegt dann auf einem zu Y kantendisjunkten Kreis $L = (l_1, ..., l_m)$ von Z. Aber dann wäre wieder $(k_1, ..., k_i, l_1, ..., l_m, k_{i+1}, ..., k_n)$ eine Euler-Tour, im Widerspruch zur maximalen Wahl von Y. Der Schluss (c)$\Rightarrow$(a) ist wie im vorigen Beweis klar. $\square$

Stellen wir uns vor, das Brückenproblem sollte durch eine Rundfahrt per Bus gelöst werden, und es gäbe Brücken, die nur in einer Richtung überfahren werden dürfen. Für diese Situation braucht man nur eine allgemeinere Definition von Digraphen mit Mehrfachkanten. Die Aussagen und ihre Beweise können dann nahezu wörtlich übernommen werden.

Man definiert daher einen *allgemeinen Digraphen* als Quadrupel (X, P, a, e), bestehend aus einer Menge X (von "Ecken" oder "Knoten"), einer Menge P (von "Pfeilen" oder "gerichteten Kanten") und zwei Funktionen $a : P \longrightarrow X$ und $e : P \longrightarrow X$, die jedem Pfeil $p \in P$ einen "Anfangspunkt" $a(p)$ und einen "Endpunkt" $e(p)$ zuordnen. Damit hat man alle Spezialfälle (inklusive Mehrfachkanten, Schleifen und Richtungen) erfaßt. Einen *gerichteten Weg* definiert man dann zweckmäßigerweise als Folge $(p_1, ..., p_n)$ von *Pfeilen* mit $e(p_{i-1}) = a(p_i)$ für $1 < i \leq n$ und spricht von einem *Kantenzug*, falls die Pfeile paarweise verschieden sind. Speziell ist ein solcher Kantenzug $(p_1, ..., p_n)$ ein *(gerichteter) Eulerscher Weg*, falls er alle Pfeile des Graphen enthält. Entsprechend definiert man gerichtete Kreise, Pfade und Euler-Touren (bei denen noch $e(p_n) = a(p_1)$ zu fordern ist). Schließlich erklärt man für jede Ecke x eines allgemeinen Digraphen die *positive Valenz* $d^+(x)$ als Anzahl der Pfeile p mit Anfangspunkt x, d.h. $a(p) = x$, und die *negative Valenz* $d^-(x)$ als Anzahl der Pfeile p mit Endpunkt x, d.h. $e(p) = x$. Der Eulersche Satz lautet für diesen Fall:

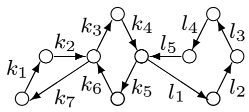
Satz 2.11 *Für einen endlichen Digraphen sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Für jede Ecke von G ist die positive Valenz gleich der negativen Valenz.*

(b) *Die Kantenmenge von G zerfällt in kantendisjunkte gerichtete Kreise.*

(c) *Jede Komponente von G besitzt eine Euler-Tour.*

Der Beweis bleibt, wie schon gesagt, im Wesentlichen der gleiche, man muß lediglich statt ungerichteter Kanten Pfeile betrachten.



Bei verallgemeinerten (symmetrischen) Graphen hat man statt der beiden Funktionen a und e nur eine Funktion e, die jeder Kante eine zweielementige Menge (die der beiden "Endknoten") zuordnet. Der Grad einer Ecke x ist dann die Anzahl aller Kanten k mit $x \in e(k)$.

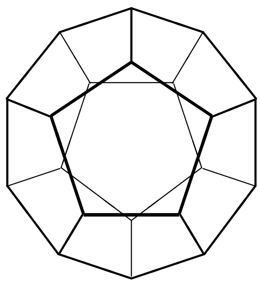
Satz 2.10 und seine gleichlautende Verallgemeinerung auf Graphen mit Mehrfachkanten läßt sich als Spezialfall von Satz 2.11 interpretieren, indem man in einem (ungerichteten) Graphen, dessen sämtliche Ecken geraden Grad haben, jede Kante so orientiert, daß für alle Ecken die positive Valenz gleich der negativen Valenz wird. Daß dies möglich ist, folgt aus der 'ungerichteten' Version, die zu jeder Komponente eine (ungerichtete) Euler-Tour liefert, entlang der man die Orientierung der durchlaufenen Kanten definieren kann.

Während bei *Euler-Touren* die Aufgabe darin besteht, jede *Kante* genau einmal zu durchlaufen, soll bei *Hamilton-Kreisen* jede *Ecke* des gegebenen Graphen genau einmal besucht werden. Das erste Beispiel für solche Problemstellungen stammt auch aus alten Zeiten:

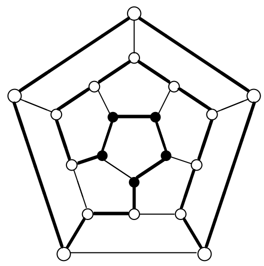
Hamilton's Puzzle (1859) *"Around the World"*

Auf dem Globus sind 20 Städte durch kreuzungsfreie Wege so verbunden, daß von jeder Stadt drei Wege ausgehen und jede von Wegen berandete Fläche genau fünf Grenzwege hat. Finde einen Rundweg, auf dem jede Stadt genau einmal besucht wird!

Die Städte liegen auf den Ecken eines *Dodekaeders* (*"Zwölf-Flächners"*) (1). Aus Gründen der Übersichtlichkeit legen wir die 20 Ecken in die Zeichenebene, indem wir das Dodekaeder von einer der 12 Flächen aus betrachten und die äußeren Kanten genügend dehnen (2).



(1)



(2)

Ein Rundweg durch alle 20 Städte ist in das Diagramm (2) eingezeichnet.

Dass es 12 Flächen sein müssen, besagt die

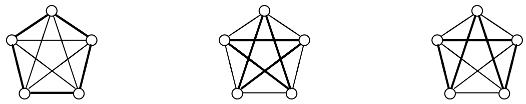
Eulersche Polyederformel:
Eckenzahl - *Kantenzahl* + *Flächenzahl* $= 2$,

welche für alle kreuzungsfrei in die Ebene zeichenbaren Graphen gilt und leicht durch Induktion (z.B. nach Anzahl der Kanten) zu beweisen ist.

Allgemein nennt man eine Eckenfolge $(x_1, ..., x_n)$ eines endlichen Graphen $G = (X, E)$ einen *Pfad*, falls je zwei aufeinanderfolgende Ecken durch eine Kante verbunden sind, d.h. $x_{i-1}x_i \in E$ für jedes $i \in \underline{n}$ gilt, und einen *Hamilton-Pfad*, falls zusätzlich alle Ecken des Graphen genau einmal auftreten. Von einem *Hamilton-Kreis* spricht man, wenn auch noch $x_n x_1 \in E$ erfüllt ist. Ein Graph heißt *Hamiltonsch*, falls er einen Hamilton-Kreis besitzt.

Beispiele 2.12 (1) Jedes m-Eck besitzt $2m$ Hamilton-Kreise (die alle durch zyklische Vertauschung oder Spiegelung auseinander hervorgehen).

(2) Jeder *vollständige Graph* $K_m = (\underline{m}, \mathcal{P}_2\,\underline{m})$ (auch *m-dimensionales Simplex* genannt) mit $m \geq 3$ ist sicher Hamiltonsch: Hier ist für *jede* Permutation σ der Zahlen $1, ..., m$ die Folge $(\sigma(1), ..., \sigma(m), \sigma(1))$ ein Hamilton-Kreis. Im m-Simplex gibt es also $m!$ Hamilton-Kreise.



Beachten Sie, daß ein m-Simplex nur für *ungerades* m eine Euler-Tour enthält! (Warum?)

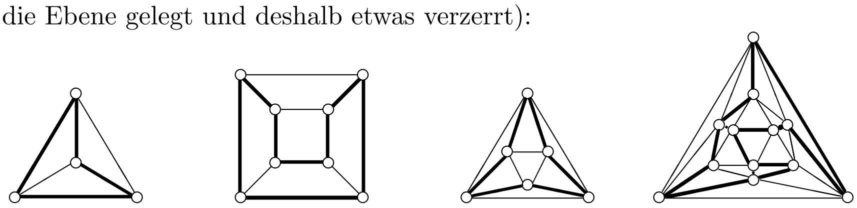
(3) Die Eckenmenge eines *vollständig bipartiten ("zweigeteilten")* Graphen zerfällt in zwei disjunkte Teilmengen, so daß jede Ecke der einen Menge mit jeder der anderen verbunden ist, aber keine zwei Ecken innerhalb einer der beiden Mengen eine Kante bilden. Man bezeichnet einen solchen Graphen mit $K_{m,n}$, falls die eine Menge m und die andere n Elemente hat. Explizit ist also

$$K_{m,n} = (\underline{m+n}, \{xy \mid x \in \underline{m}, y \in \underline{m+n} \setminus \underline{m}\} = \{m+1, ..., m+n\}).$$

Während $K_{m,n}$ nach Satz 2.8 genau dann eine Euler-Tour besitzt, wenn sowohl m als auch n gerade ist, hat $K_{m,n}$ genau dann einen Hamilton-Kreis, wenn m mit n übereinstimmt. Ein Hamilton-Pfad existiert auch für den Fall, daß sich m und n um 1 unterscheiden.

$K_{2,3}$ $K_{3,3}$

(4) Alle fünf *Platonischen Körper* besitzen Hamilton-Kreise. Beim *Dodekaeder* haben wir das zu Beginn dieses Abschnitts gesehen. Hier sind die vier anderen (in die Ebene gelegt und deshalb etwas verzerrt):



Tetraeder *Hexaeder* *Oktaeder* *Ikosaeder*

Nur das Oktaeder besitzt einen Euler-Weg bzw. eine Euler-Tour!

Leider kennt man im Gegensatz zur Gradbedingung für Eulersche Graphen kein einfaches Kriterium, das genau die Hamiltonschen Graphen charakterisiert. Allerdings gibt es einige ziemlich gute Bedingungen an die Grade, die in vielen Fällen die Existenz eines Hamilton-Kreises sichern. Soviel ist klar: Je mehr Kanten ein Graph hat, desto größer ist die Chance, einen Hamilton-Kreis zu finden. Genauer gesagt: Ist $G = (X, E)$ Hamiltonsch, so auch jeder Graph $G' = (X, E')$ mit $E \subseteq E'$.

Wir erwähnen hier nur den einprägsamen Satz von Dirac (1952):

Satz 2.13 *Ist jede Ecke zu mindestens der Hälfte aller Ecken adjazent (d. h. $d(x) \geq \frac{m}{2}$ für alle $x \in X$), so hat der Graph $G = (X, E)$ einen Hamilton-Kreis.*

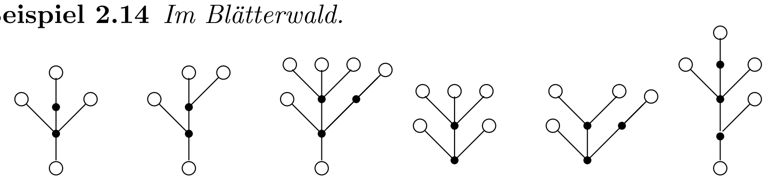
2.3 Bäume und Wälder

Was ist die graphentheoretische Abstraktion eines Baumes? Man stellt sich ein zusammenhängendes, verzweigtes Gebilde vor, bei dem "nie zwei Äste wieder zusammenwachsen". Deshalb nennt man einen zusammenhängenden und kreisfreien Graphen (also einen ohne Kreise) einen *Baum.* Ein *Wald* ist ein kreisfreier Graph, also eine disjunkte Vereinigung von Bäumen (die Kreisfreiheit überträgt sich offenbar auf die Komponenten, und umgekehrt). Die Komponenten eines Waldes sind genau seine maximalen Bäume.

Bäume und Wälder treten in einer Vielzahl von Anwendungsbereichen auf: nicht nur in der Botanik, sondern auch der Chemie, der Genetik, der Paläontologie, der Logik, und natürlich nicht zuletzt in der Informatik. Wir können hier nur einen kleinen Ausschnitt der interessanten Theorie der Bäume ansprechen.

In einem Graphen nennt man die Knoten vom Grad 1 anschaulich *Blätter* (oder *Endknoten*).

Beispiel 2.14 *Im Blätterwald.*



Das "Abpflücken" von Blättern geht graphentheoretisch folgendermaßen: Für beliebige Graphen $G = (X, E)$ und jeden Knoten $y \in X$ bezeichnet man den auf $X \setminus \{y\}$ induzierten Teilgraphen mit $G - y$. Dann gilt die folgende, für viele Induktionsbeweise nützliche Beziehung:

Lemma 2.15 *Sei G ein Graph und y ein Blatt von G. Genau dann ist G ein Baum, wenn $G - y$ ein Baum ist.*

Beweis. Bei Wegnahme eines Blattes von einem Baum bleibt offenbar ein kreisfreier zusammenhängender Graph übrig, während Herausnahme von Knoten mit einem Grad > 1 den Zusammenhang zerstört (sonst hätte G einen Kreis).

Umgekehrt entsteht aus einem Baum $G - y$ durch Hinzufügen von y wieder ein Baum, falls y mit genau einem Knoten x von $G-y$ direkt verbunden wird (der Zusammenhang bleibt bestehen, da y dann mit allen Knoten von $G - y$ durch einen über x verlaufenden Weg verbunden werden kann, und Kreise können nicht entstehen, da y nur einen Nachbarn hat). $\square$

Wir kommen nun zu drei weiteren wichtigen Charakterisierungen von Bäumen. Dazu nennen wir einen Graphen

- *maximal kreisfrei*, wenn er keine Kreise besitzt, aber die Hinzunahme einer beliebigen Kante einen Kreis erzeugt,
- *minimal zusammenhängend*, wenn er zusammenhängend ist, aber die Wegnahme einer beliebigen Kante den Zusammenhang zerstört.

Satz 2.16 *Für einen Graphen $G = (X, E)$ sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:*

(a) *G ist ein Baum.*

(b) *Je zwei Knoten von G sind durch genau einen Pfad verbunden.*

(c) *G ist minimal zusammenhängend.*

(d) *G ist maximal kreisfrei.*

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b). Wegen des Zusammenhangs sind je zwei Knoten x und y durch mindestens einen Pfad verbunden. Wären x und y durch zwei verschiedene Pfade $(x_0, ..., x_n)$ und $(y_0, ..., y_k)$ verbunden, so wäre

$$(x = x_0, x_1, ..., x_n = y = y_k, y_{k-1}, ..., y_1, y_0 = x)$$

ein geschlossenen Weg, aus dem man einen Kreis herausschneiden könnte.

(b)$\Rightarrow$(c). Natürlich ist G zusammenhängend. Wäre für eine Kante xy der Graph $G - xy = (X, E \setminus \{xy\})$ immer noch zusammenhängend, so könnte man x und y durch einen Pfad $(x_0, ..., x_n)$ verbinden, in dem die Kante xy nicht "vorkommt".

(c)$\Rightarrow$(a). Hätte G einen Kreis, so könnte man aus diesem eine Kante xy entfernen und behielte immer noch einen zusammenhängenden Graphen: denn jeder Weg $(x_0, ..., x_n)$, der die Kante $x_{i-1}x_i = xy$ benutzt, kann durch einen anderen Weg ersetzt werden, indem die Kante xy durch den Rest des Kreises ausgetauscht wird, auf dem sie liegt.

(b)$\Rightarrow$(d). Hätte G einen Kreis $(x_0, ..., x_{n-1}, x_n = x_0)$, so wären x_0 und x_{n-1} durch die beiden verschiedenen Pfade $(x_0, ..., x_{n-1})$ und (x_0, x_{n-1}) verbunden.

(d)$\Rightarrow$(a). Gäbe es in G zwei durch keinen Weg verbundene Knoten x und y, so wäre $G + xy = (X, E \cup \{xy\})$ immer noch kreisfrei, denn ein Kreis $(x_0, ..., x_n)$ in $G + xy$ müßte die neue Kante xy enthalten, d.h. es wäre $x_{i-1}x_i = xy$ für ein i, etwa $x = x_i$ und $y = x_{i-1}$ (sonst umgekehrter Durchlauf). Dann wäre aber $(x = x_i, x_{i+1}, ..., x_n, x_0, x_1, ..., x_{i-1} = y)$ ein Weg in G zwischen x und y. □

Für endliche Bäume gibt es noch zwei besonders einfache Beschreibungen. Zunächst notieren wir eine Eigenschaft endlicher zusammenhängender Graphen:

Lemma 2.17 *Ein endlicher zusammenhängender Graph G mit m Knoten hat mindestens $m-1$ Kanten.*

Beweis. Die Aussage ist richtig für $m = 1$. Wir gehen induktiv vor und betrachen einen Pfad maximaler Länge in einem Graphen G mit m Knoten, etwa $(x_0, ..., x_n)$. Alle mit x_0 in G verbundenen Knoten müssen auf diesem Pfad liegen (sonst könnte man den Pfad verlängern) und sind daher durch Wege verbunden, die x_0 nicht enthalten. Deshalb ist $G - x_0$ immer noch zusammenhängend (man ersetze alle Wege, die über x_0 führen, durch solche, die andere Knoten des Pfades benutzen). Nach Induktionsannahme hat $G - x_0$ mindestens $m - 2$ Kanten, also G mindestens $m-1$ Kanten (denn mindestens eine an x_0 hängende Kante kommt ja hinzu). □

Satz 2.18 *Für einen endlichen Graphen G mit m Knoten sind äquivalent:*

(a) *G ist ein Baum.*

(e) *G ist zusammenhängend und hat genau* $m-1$ *Kanten.*

(f) *G ist kreisfrei und hat genau* $m-1$ *Kanten.*

Beweis. (a)$\Rightarrow$(e) und (f). Die Entfernung einer Kante xy bewirkt nach Satz 2.16 (a)$\Rightarrow$(c) den Zerfall in zwei Komponenten. Jede der beiden Komponenten ist natürlich immer noch kreisfrei, also jeweils ein Baum. Nach Induktionsannahme haben beide jeweils eine Kante weniger als Knoten. Nach "Restaurieren" der Kante xy gilt das dann auch für den Graphen G.

(e)$\Rightarrow$(a). Hat man eine Kante weniger als Knoten zur Verfügung, so ist G minimal zusammenhängend, denn ein Graph mit m Knoten und weniger als $m-1$ Kanten ist, wie wir sahen, unzusammenhängend.

(f)$\Rightarrow$(a). Jede Komponente ist kreisfrei und zusammenhängend, also ein Baum. Nach dem schon Bewiesenen hat sie jeweils eine Kante weniger als Knoten. Das geht aber bei insgesamt $m-1$ Kanten nicht, außer es war überhaupt nur eine einzige Komponente vorhanden (denn für jede Komponente wird 1 abgezogen). Also ist G zusammenhängend und damit ein Baum. $\square$

Das letzte Argument zusammen mit Lemma 2.17 liefert auch noch eine verblüffend einfache Charakterisierung endlicher kreisfreier Graphen:

Folgerung 2.19 *Die endlichen Wälder sind genau diejenigen endlichen Graphen, die die folgende "Euler-Gleichung" erfüllen:*

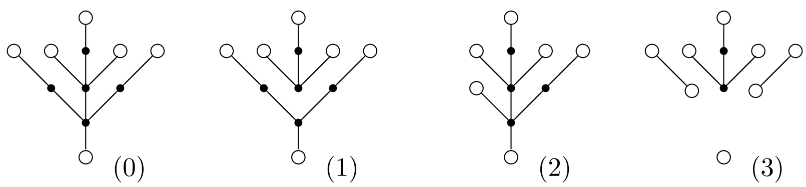
$$\textit{Anzahl der Knoten} = \textit{Anzahl der Kanten} + \textit{Anzahl der Komponenten}.$$

Fassen wir zusammen:

(1) Nach Wegnahme einer Kante aus einem Wald bleibt ein Wald übrig, der genau eine Komponente mehr als der ursprüngliche hat. Insbesondere zerfällt ein Baum nach Wegnahme einer Kante in zwei Bäume. Umgekehrt entsteht durch Verbinden zweier Bäume durch eine Kante ein einzelner Baum.

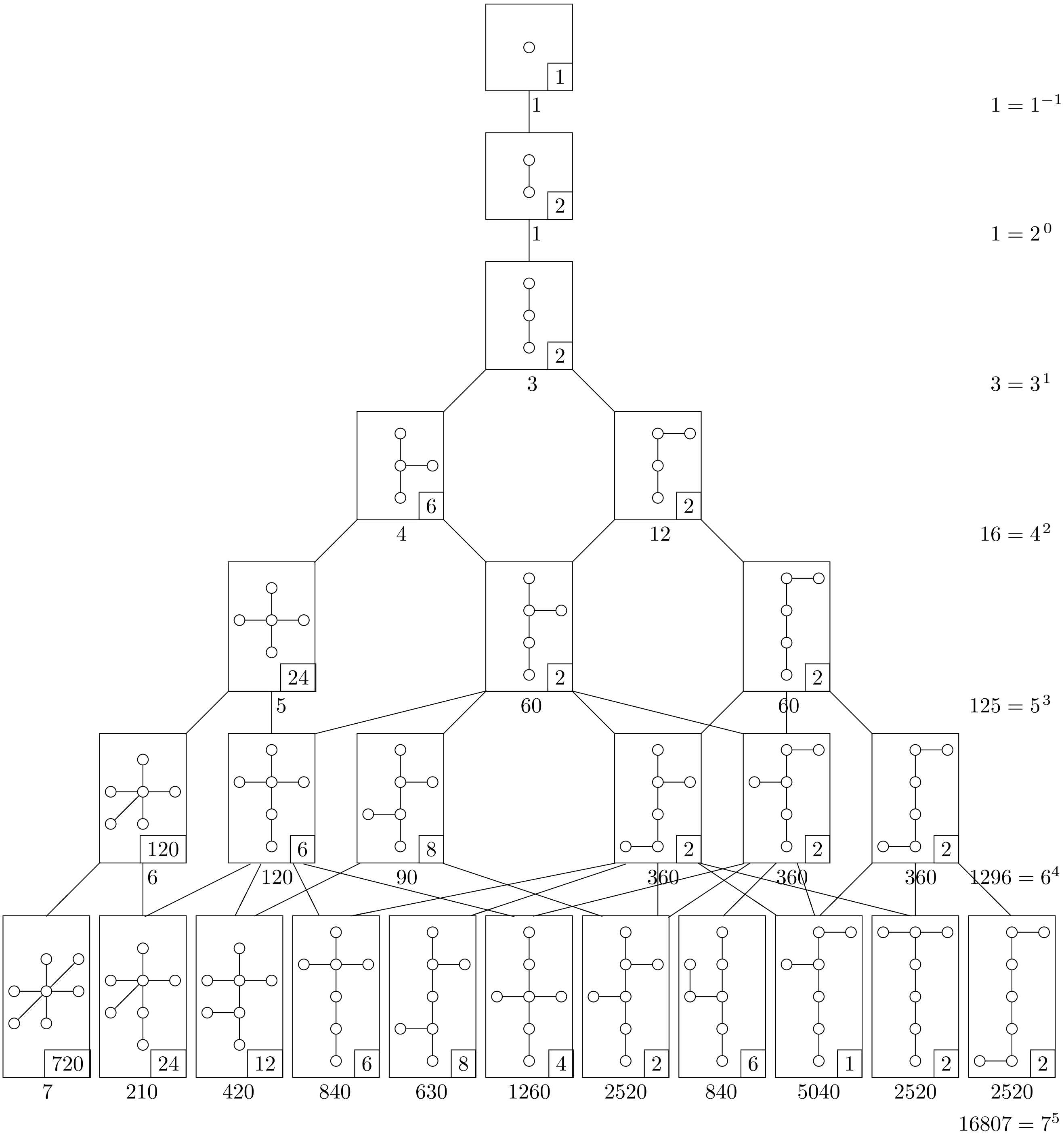
(2) Nach Wegnahme eines Blattes und der damit inzidierenden Kante von einem Baum (bzw. Wald) bleibt ein Baum (bzw. Wald) übrig. Umgekehrt wird aus einem Baum durch Hinzufügen einer Kante zwischen einem schon vorhandenen und einem neuen Knoten wieder ein Baum.

(3) In allen anderen Fällen bewirkt die Wegnahme eines Knotens und der mit ihm inzidierenden Kanten den Zerfall in ebensoviele Komponenten, wie Kanten entfernt wurden. Umgekehrt wird aus einem Wald ein Baum, wenn man je einen Knoten aus den Komponenten mit einem gemeinsamen neuen Knoten verbindet.



Die Isomorphietypen von Bäumen mit maximal 7 Knoten

Automorphismenzahl $\boxed{a}$ und Anzahl i der isomorphen Kopien

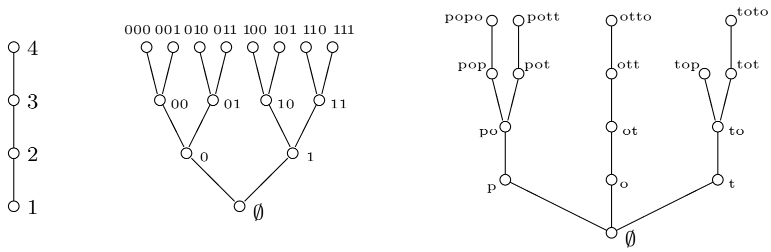


Während bei den zuvor eingeführten graphentheoretischen Bäumen keine Richtung der Kanten vorgegeben ist, stellt man sich bei einem "echten" Baum vor, daß er "von unten nach oben auseinander wächst". Dieser Anschauung wird eine ordnungstheoretische Variante des Baumbegriffes gerecht, die wir jetzt betrachten wollen. Wir verstehen unter einem *Wurzelbaum* eine endlich verkettete geordnete Menge $(X, \sqsubseteq)$ mit einem kleinsten Element w (der *Wurzel*), so daß keine zwei unvergleichbaren Elemente unter einem gemeinsamen Element liegen, oder andersherum (durch Kontraposition) ausgedrückt:

(Ψ) $x \sqsubseteq z$ und $y \sqsubseteq z \;\Rightarrow\; x \sqsubseteq y$ oder $y \sqsubseteq x$.

Eine endlich verkettete geordnete Menge mit der Eigenschaft (Ψ) nennen wir *Wurzelwald*, falls jedes Element über einem minimalen liegt. (Beachten Sie den Unterschied zwischen minimalen und kleinsten Elementen: Ein *kleinstes* Element liegt unter allen anderen, während ein *minimales* nur die Eigenschaft hat, daß kein anderes darunter liegt!) Ein Wurzelbaum heißt *unär* (*binar*, *ternär*), wenn all seine Elemente höchstens einen bzw. zwei bzw. drei obere Nachbarn haben.

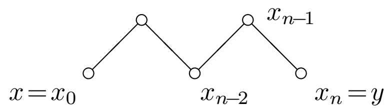
Beispiel 2.20 *Ein Wurzelwald mit einem unären, einem binären und einem ternären Wurzelbaum.*



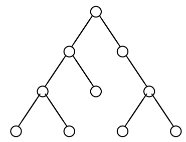
Satz 2.21 *Eine geordnete Menge ist genau dann ein Wurzelwald, wenn ihre Komponenten Wurzelbäume sind.*

Beweis. Sind die Komponenten Wurzelbäume, so überträgt sich (Ψ) von diesen auf die Gesamtmenge (denn die Voraussetzung $x \sqsubseteq z$ und $y \sqsubseteq z$ erzwingt, daß x und y in der gleichen Komponente liegen).

Umgekehrt ist jede Komponente B eines Wurzelwaldes zusammenhängend und erfüllt (Ψ). Wir wählen ein minimales y in der geordneten Menge B und behaupten, daß y unter jedem anderen $x \in B$ liegt. Wegen des Zusammenhangs von B gibt es eine Folge $(x = x_0, x_1, ..., x_n = y)$ minimaler Länge n mit $x_{i-1} \sqsubset x_i$ oder $x_i \sqsubset x_{i-1}$ für jedes $i \in \underline{n}$. Nun ist $x_{n-1} \sqsubset y$ wegen der Minimalität von y ausgeschlossen; also muß der Fall $y \sqsubset x_{n-1}$ eintreten. Die kleinstmögliche Wahl von n erzwingt unter der Annahme $n > 1$ die Beziehung $x_{n-2} \sqsubset x_{n-1}$ (sonst könnte man x_{n-1} wegen der Transitivität weglassen). Aber nun liefert (Ψ) für x_{n-2} statt x zusammen mit der Minimalität von y die Beziehung $y \sqsubseteq x_{n-2}$, und wir könnten x_{n-1} doch weglassen. Also ist nur $n \leq 1$ und $y \sqsubseteq x$ möglich. □



Wurzelbäume und -wälder werden vielfach auf den Kopf gestellt (dualisiert). Die Diagrammdarstellung liefert dann ein *nach unten* verzweigtes Wurzelgeflecht.



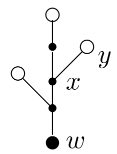
Wir wollen uns überlegen, wie die Bäume der Graphentheorie mit den Wurzelbäumen der Ordnungstheorie zusammenhängen. Erinnern wir uns daran, daß der *Nachbarschaftsgraph* (X, E) einer geordneten Menge $(X, \sqsubseteq)$ durch Symmetrisierung der Nachbarschaftsrelation $\sqsubset^\vee$ entsteht, also indem man nur die ungerichteten Kanten zwischen benachbarten Elementen betrachtet:

$E = \{xy \mid x \sqsubset^\vee y\}$.

Satz 2.22 *Der Nachbarschaftsgraph eines Wurzelbaumes* $(X, \sqsubseteq)$ *ist ein Baum, und die Ordnung ist durch diesen Baum und die Wurzel w festgelegt:*

(W) $x \sqsubseteq y \;\Leftrightarrow\;$ *x liegt auf dem Pfad von w nach y.*

Umgekehrt gibt es zu jedem Knoten w eines Baumes $B = (X, E)$ genau einen Wurzelbaum mit Wurzel w, dessen Nachbarschaftsgraph B ist, nämlich den durch (W) *definierten. Aus jedem Baum mit m Knoten entstehen also genau m Wurzelbäume durch Festlegung der Wurzel.*



Beweis. Für einen Wurzelbaum $(X, \sqsubseteq)$ ist der Graph (X, E) mit $E = \{xy \mid x \sqsubset^\vee y\}$ wegen der endlichen Verkettung zusammenhängend. Wäre $(x_0, x_1, ..., x_n = x_0)$ ein Kreis in (X, E) minimaler Länge, so könnte nicht für jedes $i < n$ die Beziehung $x_i \sqsubset^\vee x_{i+1}$ gelten (sonst wäre $x_0 \sqsubset x_n$), also gibt es ein i mit $x_{i-1} \sqsubset^\vee x_i$ und $x_{i+1} \sqsubset^\vee x_i$ (wobei $x_{-1} = x_{n-1}$ und $x_{n+1} = x_1$ zu setzen ist). Aber wegen der Bedingung (Ψ) wäre dann x_{i-1} mit x_{i+1} vergleichbar, und x_i wäre zu einem dieser Elemente nicht benachbart. Also kann (X, E) keine Kreise enthalten.

Nun sei $B = (X, E)$ ein Baum und w ein fest gewählter Knoten. Wir definieren eine Relation $\sqsubseteq$ auf X durch (W) und beachten, daß es nach Satz 2.16 stets einen *eindeutigen* Pfad zwischen w und y gibt. Die Relation $\sqsubseteq$ ist offenbar reflexiv und transitiv. Antisymmetrisch ist sie wegen der Nichtexistenz von Kreisen: Im Falle $x \sqsubset y \sqsubset x$ gäbe es einen geschlossenen Weg durch x und y, und dieser enthielte einen Kreis. Die so entstehende geordnete Menge $(X, \sqsubseteq)$ ist ein Wurzelbaum mit Wurzel w, denn nach Definition gilt $w \sqsubseteq y$ für alle $y \in X$, und im Falle $x \sqsubseteq z$ und $y \sqsubseteq z$ liegen x und y auf dem Pfad von w nach z, und es folgt $x \sqsubseteq y$ oder $y \sqsubseteq x$. Der Nachbarschaftsgraph der Ordnung $\sqsubseteq$ ist der ursprüngliche Baum B (wegen der Eindeutigkeit der verbindenden Pfade). $\square$

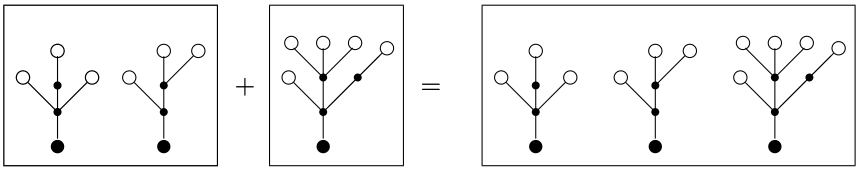
Aufgrund des letzten Satzes kann man die Wurzelbäume mit *"Stammbäumen"* identifizieren; das sind Paare (G, w), die aus einem Baum G und einem festgewählten Knoten w bestehen.

Wurzelbäume und Wurzelwälder lassen sich ebenso einfach wie Bäume und Wälder rekursiv aufbauen, indem man die folgenden beiden Schritte iteriert:

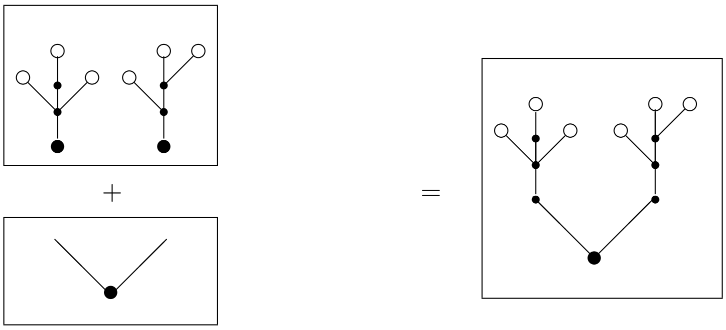
(A) Aus jedem Wurzelwald entsteht durch Hinzufügen eines disjunkten neuen Baumes ein neuer Wurzelwald.

(B) Aus jedem Wurzelwald entsteht durch Hinzufügen einer Wurzel, die mit allen Wurzeln der Komponenten verbunden wird, ein Wurzelbaum.

(A)



(B)



Konstruktion (B) kann man noch erweitern, indem man auf jeden Knoten eines Wurzelbaumes einen weiteren Wurzelbaum "aufpfropft".

Der nächste Satz ist anschaulich einleuchtend, bedarf aber doch eines Beweises:

Satz 2.23 *Eine endlich verkettete geordnete Menge ist genau dann ein Wurzelbaum, wenn sie ein kleinstes Element besitzt und jedes andere Element genau einen unteren Nachbarn ("Vorgänger") hat.*

Beweis. Ist $(X, \sqsubseteq)$ ein Wurzelbaum und $(w = x_0, ..., x_n = y)$ der eindeutige Pfad von der Wurzel w nach y, so ist x_{n-1} der eindeutige untere Nachbar von y.

Hat umgekehrt die endlich verkettete Menge $(X, \sqsubseteq)$ das kleinste Element w und die genannte Nachfolge-Eigenschaft, so muß (Ψ) gelten: Zu $x \sqsubseteq z$ und $y \sqsubseteq z$ finden wir Pfade $(z = x_0, ..., x_k = x)$ und $(z = y_0, ..., y_n = y)$ mit $x_i \sqsubset^\vee x_{i-1}$ für $i \in \underline{k}$ und $y_i \sqsubset^\vee y_{i-1}$ für $i \in \underline{n}$. Sei i der größte Index mit $x_i = y_i$. Im Falle $i < k$ und $i < n$ wäre dann auch noch $x_{i+1} \sqsubset^\vee x_i$ und $y_{i+1} \sqsubset^\vee x_i$ erfüllt, also $x_{i+1} = y_{i+1}$ im Widerspruch zur Wahl von i. Also muß $x \sqsubseteq x_i = y$ oder $y \sqsubseteq y_i = x$ gelten. $\square$

Vorsicht! Bei einem dualisierten Baum sind die "Vorgänger" Nachfolger!

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wie man Bäume und Wälder *codieren*, d.h. durch geeignete Zahlenfolgen eindeutig beschreiben kann. Der Einfachheit halber nehmen wir dabei an, daß die Knotenmenge $\underline{m} = \{1, ..., m\}$ ist. Das naheliegendste Codierungsverfahren wird durch Satz 2.23 geliefert: Die *Vorgängerfunktion* eines Wurzelwaldes ordnet jedem nichtminimalen Knoten seinen eindeutigen unteren Nachbarn zu. Die *Nachbarschaftsrelation* eines Wurzelbaumes ist allerdings *dual* zur Vorgängerfunktion, also eine *Nachfolgerfunktion*! Erinnern wir uns daran, daß Funktionen nichts anderes als spezielle Relationen sind, nämlich solche Relationen F, bei denen zu jedem x höchstens ein y mit xFy existiert, und daß dieses y mit $F(x)$ bezeichnet wird. Der Definitionsbereich von F ist dann die Menge aller x, für die es ein solches y gibt. Irreflexivität bedeutet für eine Funktion F, daß sie keinen Fixpunkt hat (also $F(x) = x$ nie auftritt). Weiter ist F genau dann *intransitiv*, wenn $F(x) = F^k(x)$ nur für $k = 1$ möglich ist. Solche Funktionen beschreiben gerade die Wurzelwälder:

Satz 2.24 *Für eine Relation $F \subseteq \underline{m} \times \underline{m}$ sind äquivalent:*

(a) *F ist die Vorgängerfunktion eines Wurzelwaldes mit Knotenmenge $\underline{m}$.*

(b) *F ist eine intransitive Funktion.*

(c) *F ist eine irreflexive und azyklische Funktion, d.h. $x \neq F^k(x)$ für $k \in \mathbb{N}$.*

Beweis. (a) $\Leftrightarrow$ (b) folgt unmittelbar aus Satz 2.23 und der bekannten Tatsache, daß die endlich veketteten Ordnungen durch Übergang zu Nachbarschaftsrelationen bijektiv den intransitiven Relationen entsprechen.

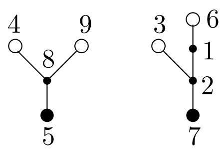
Die Äquivalenz von (b) und (c) beweist man durch Kontraposition:

(b)$\Rightarrow$(c). Aus $k \geq 1$ und $x = F^k(x)$ folgt $k+1 > 1$ und $F(x) = F^{k+1}(x)$.

(c)$\Rightarrow$(b). Aus $k+1 > 1$ und $F(x) = F^{k+1}(x)$ folgt für $y = F(x)$: $y = F^k(y)$. □

Folgerung 2.25 *Man erhält eine Bijektion zwischen Wurzelwäldern mit Knotenmenge $\underline{m}$ und intransitiven Funktionen von Teilmengen der Menge $\underline{m}$ nach $\underline{m}$, indem man jedem Wurzelwald seine Nachfolgerfunktion zuordnet. Dabei entsprechen den Wurzelbäumen diejenigen intransitiven Funktionen, deren Definitionsbereich genau ein Element von $\underline{m}$ (die Wurzel) nicht enthält.*

Beispiel 2.26 Der Vorgängercode des Wurzelwaldes



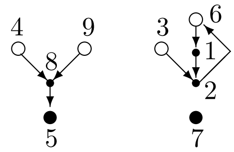
lautet

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 2 & 8 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Hingegen kann die an der Stelle 2 abgeänderte Funktion

$$\widetilde{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 2 & 8 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

wegen $\widetilde{F}^3(2) = 2$ kein Nachfolgercode eines Wurzelwaldes sein. In der Tat enthält der zugehörige Digraph einen Zykel:



Ein Vorteil der zuvor beschriebenen Codierung ist, daß man den zugehörigen Wurzelwald sehr schnell rekonstruieren kann. Allerdings sieht man einer Funktion (bzw. der entsprechenden endlichen Folge) nicht immer sofort an, ob sie überhaupt einen Wurzelwald bzw. -baum beschreibt. Man kann jedoch alle Wurzelwälder durch einen sehr einfachen Algorithmus gewinnen: Beginnend mit den m Knoten $1, ..., m$ und der leeren Kantenmenge, fügt man Schritt für Schritt eine *nummerierte und gerichtete* Kante hinzu. Die einzige zu beachtende Vorschrift ist dabei, daß in jedem Schritt die neu anzufügende Kante zwischen zwei *verschiedenen* Komponenten des bis dahin entstandenen Wurzelwaldes verlaufen muß. Für die k-te Kante (in Richtung der Vorgängerfunktion) hat man zwar m Möglichkeiten, den Endpunkt zu wählen, aber nur noch $m-k$ Möglichkeiten bei der Auswahl des Anfangspunktes (denn dieser darf weder zuvor verwendet worden noch Wurzel der Komponente des Endpunktes sein – sonst entsteht ein Zykel). Insgesamt gibt es also

$$\prod_{k=1}^{m-1} m(m-k) = (m-1)!\, m^{m-1}$$

Möglichkeiten der nummerierten Kantenwahl. Am Schluß ist ein Wurzelbaum entstanden, dessen Kanten mit einer Permutation der Zahlen von 1 bis $m-1$ belegt sind. Da es $(m-1)!$ solche Permutationen gibt, bleiben nach Entfernen der Nummerierung der Kanten m^{m-1} Wurzelbäume. Damit ist der folgende berühmte Satz von Cayley (1889) gezeigt:

Satz 2.27 *Auf einer festen Menge von m Knoten gibt es genau m^{m-1} Wurzelbäume und folglich m^{m-2} Bäume.*

Die vielleicht eleganteste Codierung von Bäumen geschieht mit Hilfe des sogenannten *Prüfer-Codes.* Die simple, aber wirkungsvolle Grundidee besteht darin, schrittweise die Blätter mit den kleinsten Nummern abzupflücken und gleichzeitig die Folge der zum jeweiligen Blatt benachbarten Knoten zu notieren, bis nur noch zwei Knoten übrigbleiben. (Aufgrund unserer Konvention sind die Nummern die Blätter selbst.)

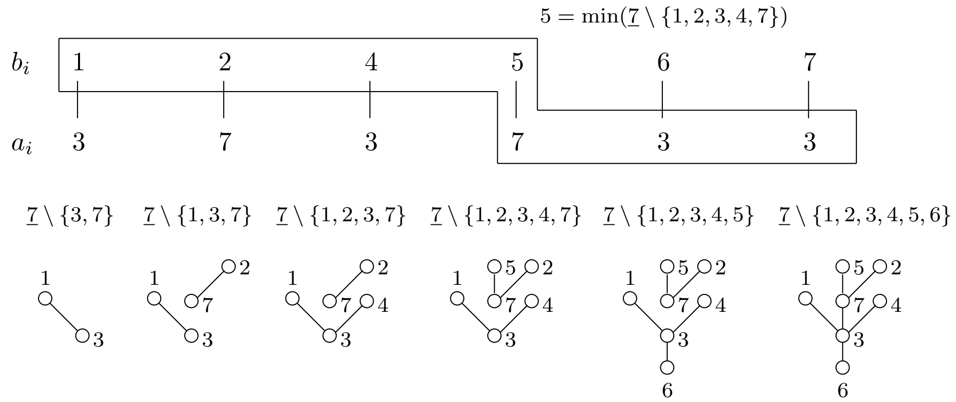
Satz 2.28 *Zu einem gegebenen Baum $G = (\underline{m}, E)$ definiere man induktiv zwei Folgen $(b_i \mid i = 1, ..., m-2)$ und $(a_i \mid i = 1, ..., m-2)$ durch die Festlegung, daß b_i das kleinste Blatt des Baumes $G_i = G - \{b_j \mid j < i\}$ und a_i sein Nachbar in G_i ist. Auf diese Weise erhält man eine Bijektion zwischen der Gesamtheit aller Bäume mit der Knotenmenge $\underline{m}$ und der Menge $\underline{m}^{m-2}$ aller $(m-2)$-stelligen Folgen $(a_1, ..., a_{m-2})$ mit Werten in $\underline{m}$.*

Dies bestätigt den Satz von Cayley. Die oben konstruierte Folge $(a_1, ..., a_{m-2})$ heißt *Prüfer-Code* des Baumes G. Um Satz 2.28 zu begründen, müssen wir uns vergewissern, daß *jede* Folge $(a_1, ..., a_{m-2})$ in $\underline{m}$ wirklich als Prüfer-Code eines eindeutig bestimmten Baumes auftritt. Zu diesem Zweck rekonstruieren wir den gesuchten Baum wie folgt. Wir setzen $a_{m-1} := a_{m-2}$ und bestimmen die zugehörigen Blätter rekursiv durch die Vorschrift, daß b_i das kleinste Element der folgenden Restmenge sei:

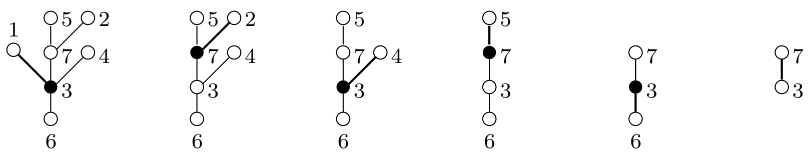
$$\underline{m} \setminus \{b_1, ..., b_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_{m-1}\} \quad (i = 1, ..., m-1).$$

Der letzte Knoten b_m ist dann der noch übrig gebliebene, und die Kanten des Baumes sind die Zweiermengen $a_i b_i$ $(i = 1, ..., m-1)$.

Beispiel 2.29 Wir betrachten die Folge $(3, 7, 3, 7, 3)$ und bauen schrittweise den zugehörigen Baum mit der Knotenmenge $\underline{7}$ auf:



"Minimales Abblättern" führt auf die ursprüngliche Codierung:



Wir wollen noch eine Formel für die Anzahl aller Bäume mit Knotenmenge $\underline{m}$ und fest vorgegebenen Gradzahlen $d_i = d_G(i)$ $(i = 1, .., m)$ aufstellen. Da die Anzahl der Kanten $m-1$ beträgt, muß die folgende Gleichung erfüllt sein:

(K) $\sum_{i=1}^{m} d_i = 2m-2$ bzw. $\sum_{i=1}^{m} (d_i - 1) = m-2$.

Dabei ist stets $d_i - 1 \geq 0$, weil kein Knoten den Grad 0 hat. Mit der Gleichung (K) läßt sich häufig leicht entscheiden, ob eine gegebene Folge die Gradfolge eines Baumes sein kann oder nicht. Mit Hilfe eines Induktionsbeweises, den wir hier weglassen (Blätter schrittweise abpflücken!) erhält man die folgende Formel:

Satz 2.30 *Zu jeder Folge* $(k_1, ..., k_m)$ *von ganzen Zahlen* k_i *mit* $0 \le k_i < m$ *und* $\sum_{i=1}^{m} k_i = m-2$ *gibt es genau*

$$\binom{m-2}{k_1 \ ... \ k_m} = \frac{(m-2)!}{k_1! \cdot ... \cdot k_m!}$$

Bäume G *mit der Knotenmenge* $\underline{m}$ *und den Gradzahlen* $d_G(i) = k_i + 1$ $(i \in \underline{m})$.

Dieser Multinomialkoeffizient ist zugleich die Anzahl der Zerlegungen der Menge $\underline{m-2}$ in (eventuell leere) Teilmengen M_i mit k_i Elementen. Bei einem Wurzelbaum mit Wurzel m und Nachfolger $m-1$ erhält man eine solche Zerlegung, indem man jedem Knoten außer m die Menge seiner Nachfolger und der Wurzel m die Menge der Vorgänger bis auf $m-1$ zuordnet.

Aus Satz 2.30 ergibt sich ein weiteres Mal die Cayleysche Formel, diesmal durch Summation über alle Multinomialkoeffizienten:

$$\sum_{k_i \ge 0, k_1 + ... + k_m = m-2} \binom{m-2}{k_1 \ ... \ k_m} 1^{k_1} \cdot ... \cdot 1^{k_m} = (1 + ... + 1)^{m-2} = m^{m-2}.$$

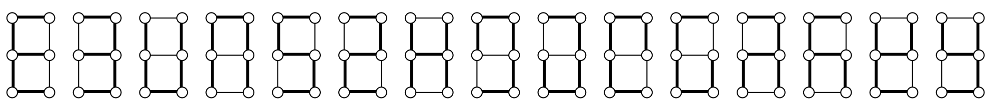
Schließlich erwähnen wir ohne Beweis (der einige Tricks der linearen Algebra benutzt) eine geniale Formel, welche für einen beliebigen zusammenhängenden Graphen die Anzahl seiner *Spannbäume* oder *Gerüste*, d.h. aller Teilbäume mit gleicher Knotenmenge, angibt.

Satz 2.31 *Für einen endlichen Graphen* $G = (\underline{m}, E)$ *ist die Laplace-Matrix* $Q_G = (q_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ *definiert durch*

$q_{ii} = d_G(i)$, $q_{ij} = -1$ *für* $ij \in E$ *und* $q_{ij} = 0$ *sonst.*

Der Betrag der Determinante jeder Matrix, die durch Streichen der i*-ten Zeile und* j*-ten Spalte von* Q_G *entsteht, gibt die Anzahl der Spannbäume von* G *an. Für den vollständigen Graphen* $G = K_m$ *ergibt dies wieder die Zahl* m^{m-2}.

Beispiel 2.32 *Ein Graph und seine 15 Spannbäume*



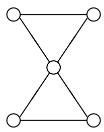
$$Q_G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ Q_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ |\det Q_{ij}| = 15.$$

2.4 Mehrfacher Zusammenhang

Dieser Begriff ist für die Theorie der Netzwerke, Kommunikations- und Transportsysteme (also generell für die Informatik) von großer Bedeutung, doch können wir hier nur kurz auf einige wenige Aspekte eingehen.

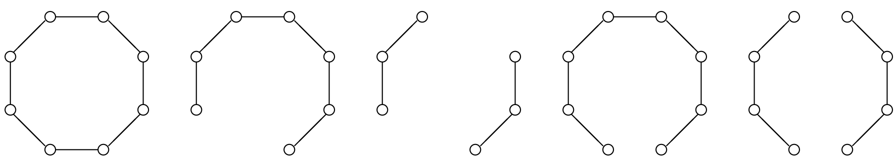
Ein Netzwerk (bestehend aus Knoten und Verbindungen) ist umso stabiler, je mehr Verbindungen zur Verfügungen stehen. So wird man sich häufig wünschen, daß durch Ausfall einiger "Stationen" oder "Leitungen" nicht die Kommunikation oder der Transport zusammenbricht. Der graphentheoretische Begriff, der diese "Robustheit" beschreibt, ist der *mehrfache Zusammenhang.* Genauer nennt man einen Graphen $G = (X, E)$ k*-fach eckenzusammenhängend* oder k*-zusammenhängend*, wenn er mehr als k Ecken hat und nach Herausnahme einer beliebigen Menge Y von k–1 Ecken immer noch einen zusammenhängenden Graphen auf der Restmenge $X \setminus Y$ induziert. Entsprechend heißt G k*-fach kantenzusammenhängend*, falls nach Entfernen von je $k-1$ Kanten immer noch ein zusammenhängender Graph übrigbleibt.

Beispiele 2.33 (1) Ein 2-fach eckenzusammenhängender Graph ist stets auch 2-fach kantenzusammenhängend, aber die Umkehrung gilt nicht! Der folgende Graph ist 2-fach kanten-, aber nicht 2-fach eckenzusammenhängend:



(2) Bäume sind niemals 2-fach zusammenhängend, da es (außer im Extremfall von höchstens zwei Ecken) immer einen Knoten gibt, der kein Blatt ist, und nach Entfernen eines solchen Knotens zerfällt der Baum. Aus einem ähnlichen Grund sind Bäume auch nie 2-fach kantenzusammenhängend (siehe die Diagramme nach 2.21).

(3) Ein n-Eck (mit $n > 2$) ist stets 2-fach, aber niemals 3-fach ecken- bzw. kantenzusammenhängend. Allgemeiner ist jeder Hamiltonsche Graph 2-zusammenhängend und jeder Eulersche Graph 2-fach kantenzusammenhängend.



(4) Am stärksten zusammenhängend sind natürlich die vollständigen Graphen (Simplexe) $K_m = (\underline{m}, \mathcal{P}_2\underline{m})$. Definitionsgemäß sind sie zwar nicht m-zusammenhängend (da es nur m Knoten gibt), aber sie sind sowohl $(m-1)$-ecken- als auch $(m-1)$-kantenzusammenhängend. Für den Eckenzusammenhang ist das klar, weil alle induzierten Teilgraphen wieder Simplexe sind. Für den Kantenzusammenhang beweisen wir ein stärkeres Resultat:

Satz 2.34 *Jeder Graph mit m Knoten und mindestens*

$$(m-1)(m-2)/2+k = m(m-1)/2 - (m-k-1)$$

Kanten ist k-fach kantenzusammenhängend.

Nach Herausnahme von $m-k-1$ Kanten aus einem vollständigen Graphen K_m bleibt also noch ein k-fach kantenzusammenhängender Graph übrig.

Beweis. Zerfällt ein Graph mit $m > k$ Knoten nach Entfernen von $k-1$ Kanten in mindestens zwei Komponenten, von denen eine n Elemente hat, so besitzt der Restgraph maximal

$$n(n-1)/2 + (m-n)(m-n-1)/2 = m(m-1)/2 - n(m-n) \leq (m-1)(m-2)/2$$

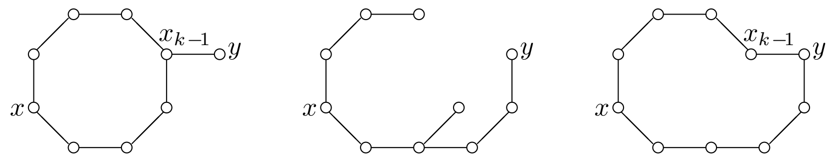
Kanten. Der Ausgangsgraph hat also höchstens $(m-1)(m-2)/2 + k-1$ Kanten. Durch Kontraposition folgt die Behauptung. □

Beispiel 2.35 *Ein 3-fach kantenzusammenhängender Graph, der nach Entfernen von drei Kanten zerfällt, also nicht 4-fach kantenzusammenhängend ist:*

Im Folgenden konzentriert sich unser Interesse auf 2-fachen Zusammenhang. Deinitionsgemäß ist ein Graph mit mindestens drei Knoten genau dann 2-zusammenhängend, wenn das Entfernen einer beliebigen Ecke den Zusammenhang nicht zerstört. Solche Graphen besitzen eine naheliegende und einfache Charakterisierung:

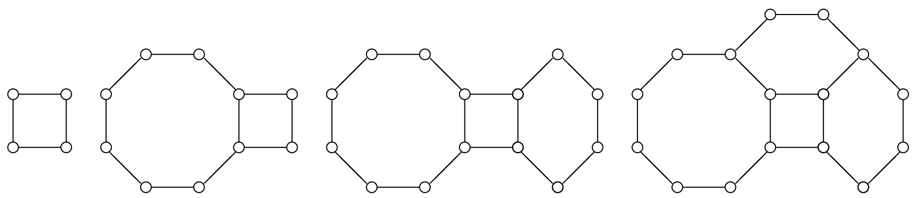
Satz 2.36 *Ein Graph ist genau dann 2-zusammenhängend, wenn je zwei seiner Ecken auf einem Kreis liegen.*

Beweis. Wenn letzteres der Fall ist, kann man eine beliebige Ecke löschen, und es bleibt mindenstens ein Weg zwischen je zwei Ecken des Restgraphen (da sie auf einem Kreis des ursprünglichen Graphen liegen). Die Umkehrung ist nicht so einfach zu sehen, man beweist sie zum Beispiel per Induktion über den Abstand (die Länge eines kürzesten verbindenden Pfades) zwischen zwei Ecken x und y. Ist dieser gleich 1, so ist xy eine Kante, und nach Entfernen derselben bleibt ein Pfad zwischen x und y, der zusammen mit xy einen Kreis liefert, auf dem x und y liegen. Ist die Aussage für alle Eckenpaare vom Abstand $< k$ bewiesen, so findet man für zwei beliebige Ecken x, y mit Abstand k einen kürzesten Verbindungspfad $(x = x_0, ..., x_k = y)$. Da x und x_{k-1} den Abstand $k-1$ haben, liegen sie nach Induktionsannahme auf einem Kreis K in G. Der Restgraph $G - x_{k-1}$ ist zusammenhängend und enthält daher einen Pfad von x nach y. Aus einem Teil dieses Pfades und einem Teil des Kreises K bastelt man nun einen Kreis, der x und y enthält, gemäß der nachfolgenden Skizze:



Man kann alle 2-zusammenhängenden Graphen sukzessive generieren, indem man, mit einem Kreis startend, schrittweise neue Pfade anhängt, deren (verschiedene!) Endpunkte in dem jeweils zuletzt konstruierten Graphen liegen, während alle anderen ("inneren") Ecken des Pfades neu hinzukommen.

Beispiel 2.37 *Anfügen von "Ohren"*

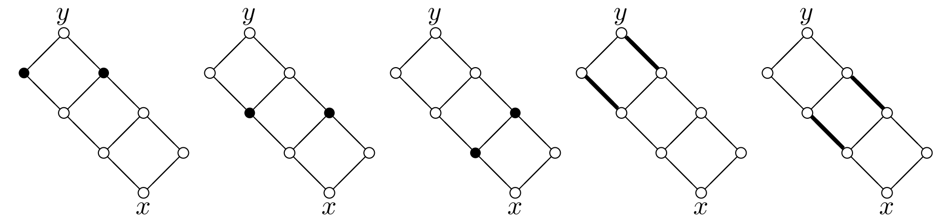


Etwas anders formuliert, hat man folgende Charakterisierung:

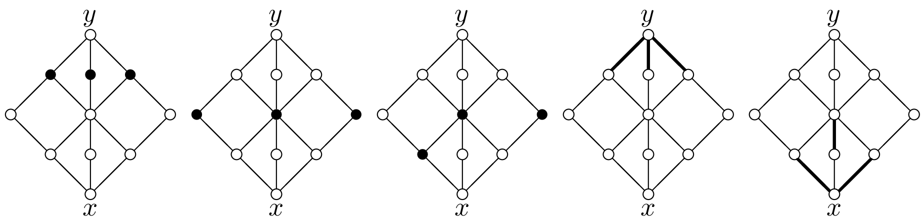
Satz 2.38 *Ein endlichen Graph ist genau dann 2-zusammenhängend, wenn er aus einem Dreieck durch wiederholtes Hinzufügen von Kanten und Unterteilen von bereits vorhandenen Kanten (d.h. Einfügen von neuen Ecken auf diesen Kanten) hervorgeht.*

Zu Satz 2.36 gibt es eine wichtige Verallgemeinerung auf k-fachen Zusammenhang, den berühmten Satz von Menger (1927). Zu seiner Formulierung brauchen wir sogenannte *trennende* Ecken- bzw. Kantenmengen. Man sagt, eine Teilmenge T von *Ecken trennt* zwei nicht in T liegende Ecken x und y eines Graphen $G = (X, E)$, falls x und y in dem Restgraph $G - T$ durch keinen Weg verbunden werden können, also in zwei verschiedenen Komponenten liegen. Mit anderen Worten: Jeder x mit y verbindende Weg enthält eine Ecke aus T. Entsprechend *trennt* eine *Kantenmenge* K die Ecken x und y, falls x und y in verschiedenen Komponenten des Restgraphen $G - K$ liegen. Offenbar sind $Ex = \{z \,|\, xz \in E\}$ und $Ey = \{z \,|\, yz \in E\}$ stets trennende Eckenmengen für x und y, sofern x und y nicht adjazent sind. Entsprechend sind $\{e \in E \,|\, x \in e\}$ und $\{e \in E \,|\, y \in e\}$ trennende Kantenmengen für x und y, manchmal sogar die einzigen.

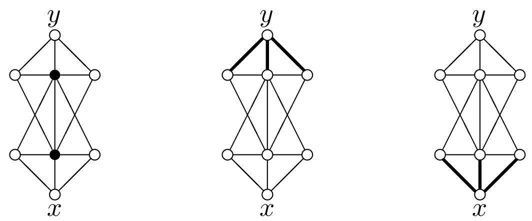
Beispiele 2.39 (1) *Ein Graph mit drei von acht zweielementigen trennenden Eckenmengen und zwei von fünf zweielementigen trennenden Kantenmengen für x und y:*



(2) *Ein Graph mit drei von elf trennenden Eckenmengen und zwei von vier trennenden Kantenmengen minimaler Mächtigkeit* 3 *für* x *und* y*:*



(3) *Ein Graph mit einer eindeutigen zweielementigen trennenden Eckenmenge und nur zwei trennenden Kantenmengen minimaler Mächtigkeit* 3 *für* x *und* y*:*



Zwei Wege zwischen x und y heißen *eckendisjunkt*, falls sie außer den Endecken x und y keinen weiteren gemeinsamen Ecken haben, und *kantendisjunkt*, falls sie keine gemeinsamen Kanten haben. Die Verallgemeinerung des Satzes 2.36 von 2 auf k lautet nun:

Satz 2.40 *Für je zwei nichtadjazente Ecken* x *und* y *in einem endlichen Graphen* G *ist die maximale Anzahl eckendisjunkter Wege von* x *nach* y *gleich der Minimalzahl trennender Ecken. Analoges gilt für Kanten statt Ecken.*

Beweisidee. Eine trennende Eckenmenge muß natürlich mindestens so viele Elemente haben, wie es disjunkte Wege zwischen x und y gibt (sonst könnte man sich auf einem Weg an dieser Trennmenge "vorbeimogeln"). Zu zeigen ist also, daß die Existenz einer x und y trennenden Menge T mit einer Minimalzahl von k Ecken auch k eckendisjunkte Wege zwischen x und y garantiert. Dies beweist man durch eine raffinierte Induktion über die Anzahl m der Ecken des Graphen, worauf wir hier aber verzichten wollen.